APLICAÇÕES DAS
EQUAÇÕES QUADRÁTICAS

Isabel Margarida das Neves Veloso Guilherme

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE DE COIMBRA

APLICAÇÕES DAS EQUAÇÕES QUADRÁTICAS

Isabel Margarida das Neves Veloso Guilherme

Relatório para a obtenção do Grau de **Mestre em Ensino da Matemática**

no 3º ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário

Júri

Presidente: Carlos Alberto de Carvalho Duarte Gamas

Orientador: Maria de Fátima da Silva Leite

Vogal: Alfredo Manuel Gouveia da Costa

Data: Setembro de 2012

Resumo

Este relatório, de carater científico e pedagógico, demonstra a importância das equações quadráticas através das suas aplicações e foi realizado em duas fases.

Na primeira fase é apresentado o trabalho desenvolvido no âmbito do Projeto Educacional I, no qual se pode constatar que as equações quadráticas são fundamentais para a determinação das soluções das equações diferenciais ordinárias lineares de segunda ordem e, consequentemente, em todas as suas aplicações. Destas, destaca-se o sistema massa-mola e um modelo, baseado nesse sistema, que descreve o movimento exercido pela extremidade de um cabo da ponte suspensa de Tacoma Narrows, momentos antes da rotura do tabuleiro central. Esta ponte, pouco tempo após a sua construção e perante ventos fortes, exibiu oscilações que aumentaram de intensidade de tal forma que provocaram a sua queda.

Numa segunda fase, referente ao Projeto Educacional II, é mencionada a planificação e a implementação em sala de aula de um conjunto de atividades, para o oitavo, nono e décimo anos de escolaridade, que pretendem realçar a importância das equações quadráticas na modelação matemática e consequentemente na resolução de problemas.

No final, é apresentada uma reflexão pessoal sobre o trabalho, com ênfase nas atividades pedagógicas desenvolvidas e nas dificuldades encontradas.

Palavras Chave: Equações quadráticas, Equações diferenciais lineares de segunda ordem de coeficientes constantes, Sistema massa-mola.

Abstract

This scientific and pedagogic report states the importance of quadratic equations through its practical application, being structured into two stages.

The first phase presents the work developed during Educational project I, which concludes that the quadratic equations are essential for the determination of solutions in differential ordinary linear equations of second order and consequently in all their applications. Among these, the mass-spring system is distinguished, as well as a model related to that system, which describes the movement made by a cable ending in the suspended bridge of Tacoma Narrows just before the breaking of the central deck. Just after its building, with strong winds, this bridge suffered severe oscillation which eventually led to its downfall.

The second phase, related to the Educational Project II mentions the planning and execution of a set of classroom activities for grade eight, nine and ten, which aims at stressing the importance of quadratic equations for mathematical modeling and therefore in problem solving.

The report is concluded with a personal review on the work done, emphasizing the pedagogical activities developed and also the difficulties found.

Keywords: Quadratic equations, second-order linear differential equation with constant coefficient, mass-spring system.

Agradecimentos

Terminado este trabalho estou claramente agradecida à minha orientadora, Professor Doutora Maria de Fátima Silva Leite, pelas suas sugestões, indicações marcadas pela sua experiência e, claro, pelo seu incentivo.

Agradeço às professoras e aos alunos que me acompanharam durante esta fase pela sua colaboração neste projeto.

Às amigas Lurdes e Sónia, que me acompanharam ao longo deste percurso, agradeço o apoio e o incentivo.

Índice

Índice de figuras

Introdução

O presente relatório teve origem numa proposta da Professora Fátima Leite referente à comunicação apresentada no parlamento britânico, pelo deputado Mr. McWalter, em vinte seis de junho de 2003, sobre a importância das equações quadráticas [14]. Esta intervenção pretendia responder a um dirigente sindical que tinha afirmado publicamente que o estudo das equações quadráticas era um tópico irrelevante na aprendizagem dos alunos. De acordo com o deputado Mr McWalter, quem considera que as equações quadráticas são uma manipulação despromovida de qualquer significado tem um total desconhecimento da sua importância na aprendizagem, já que é muito vasto o seu leque de aplicações a problemas da vida real.

Esta intervenção inspirou os dois artigos de Chris Budd e Chris Sangwin, [3] e [4], que surgiram em defesa das equações quadráticas. Nestes artigos, os autores dão ênfase a algumas das suas aplicações e à forma como têm desempenhado um papel fundamental na história da humanidade. Começam por referir que os primeiros registos da equação quadrática apareceram na civilização babilónia associados ao cálculo de impostos. Em seguida, os gregos alargaram o leque das aplicações das equações quadráticas, das quais destaco as cónicas: círculo, elipse, hipérbole e parábola, que mais tarde aparecem relacionadas ao movimento dos planetas em torno do sol. Com Galileu surge uma nova equação quadrática que dá a posição de uma partícula em função do tempo. Esta equação aplica-se na determinação da distância de travagem de um carro que circula a uma determinada velocidade ou no movimento de projéteis sob ação da gravidade. Newton formulou as três leis do movimento que junto com as equações diferenciais são fundamentais para descrever matematicamente fenómenos naturais, como o movimento do pêndulo. A equação diferencial, nomeadamente a de coeficientes constantes de ordem dois necessita na determinação das suas soluções da resolução da equação quadrática que lhe está associada. Por fim, os autores realçam a aplicabilidade da equação quadrática a grande parte da tecnologia moderna associada às telecomunicações.

Desta forma, a importância da equação quadrática repousa no facto de estar presente, ainda que como mera coadjuvante, em quase todos os domínios do conhecimento matemático, tanto como objeto de estudo quanto como instrumento para outros estudos.

Seguindo esta linha de pensamento, é finalidade deste relatório apresentar um conjunto de situações que envolvem ou resultam de aplicações das equações quadráticas em diferentes áreas do saber.

O primeiro capítulo deste relatório, de caráter mais científico, está dividido em três secções. Na primeira apresentam-se algumas noções e propriedades relacionadas com equações diferenciais de segunda ordem tendo como objetivo a obtenção das soluções dessas equações diferenciais com coeficientes constantes. A segunda secção é dedicada ao estudo dos movimentos envolvidos no sistema massa-mola e que resultam de aplicações das equações diferenciais de coeficientes constantes de ordem dois. Os conhecimentos do sistema massa-mola servem de sustentáculo para a compreensão do modelo matemático, apresentado na terceira secção, que descreve o movimento exercido pela extremidade de um cabo da ponte de Tacoma Narrows, momentos antes da sua queda.

No segundo capítulo, com um caráter mais pedagógico, é mencionada a planificação e a implementação em sala de aula de um conjunto de atividades destinadas ao oitavo, nono e décimo anos de escolaridade. Destas atividades, constam algumas tarefas que têm como principal objetivo sensibilizar os alunos para a importância das equações quadráticas através da sua aplicação à modelação matemática e, consequentemente, à resolução de problemas do quotidiano. No décimo ano, foi também explorada a parábola e a elipse como exemplos de aplicação das equações quadráticas. Algumas das tarefas envolviam o recurso ao programa de geometria dinâmica GeoGebra. Este foi utilizado quer para encontrar o modelo matemático que traduzia a situação apresentada quer para construir uma parábola. A metodologia utilizada passou, predominantemente, pelo trabalho de grupo.

No final, é apresentada uma reflexão pessoal sobre este trabalho, com ênfase nas atividades pedagógicas desenvolvidas e nas dificuldades encontradas.

Capítulo I - Projeto Educacional I

Nesta secção, apresentam-se algumas das noções básicas referentes às equações diferenciais de segunda ordem e um procedimento para determinação das soluções das equações diferenciais de coeficientes constantes e de ordem dois. As fontes para a sua redação foram [11] e [21].

1.1 Equações diferenciais de segunda ordem

Todas as equações diferenciais ordinárias (EDO) lineares de ordem n escrevem-se na forma:

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \ \dots + a_{n-1}(t)x' + a_n(t)x = b(t), \qquad (1)$$

sendo a_i e b funções reais de variável real conhecidas e definidas num certo intervalo I. As funções a_i são chamadas coeficientes da equação diferencial e b o segundo membro. No caso em que o segundo membro seja a função identicamente nula em I, a equação diz-se EDO homogénea e toma a forma:

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \ \dots + a_{n-1}(t)x' + a_n(t)x = 0 \qquad (2)$$

Caso contrário a equação chama-se completa ou não homogénea. Quando todos os coeficientes a equação (1) forem constantes, esta equação é designada por EDO linear de coeficientes constantes

Definição 1:
Diz-se que uma função $x = x(t)$ é solução da EDO (1)*, no intervalo $I \subset \mathbb{R}$, se concomitantemente com as suas derivadas até à ordem n satisfaz a equação diferencial em I.*

Sem perda de generalidade pode-se considerar que o intervalo I é aberto.

Definição 2:
O conjunto de todas as soluções de (1) em I *chama-se solução geral de* (1) *em I.*

Teorema 1 (existência da unicidade de solução)
Sejam $a_1, \dots, a_n$ e b funções contínuas num certo intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Sejam t_0 um ponto qualquer de I e $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ quaisquer números reais. Então, existe uma e uma só solução $x = x(t)$ definida em I da equação diferencial (1), *satisfazendo as condições iniciais $x(t_0) = \alpha_0 \, , x'(t_0) = \alpha_1, \dots, x^{(n-1)}(t_0) = \alpha_{n-1}$.*

A partir deste momento ir-se-á considerar que todas as equações diferenciais ordinárias lineares se encontram nas condições do teorema anterior e que as suas soluções estão definidas no intervalo I, mesmo que não haja referência explícita a este intervalo.

Segue-se a apresentação de algumas propriedades das soluções das equações diferenciais homogéneas de coeficientes (2).

Teorema 2

O conjunto das soluções $S_0(I)$ constituído pela totalidade das soluções, em I, da equação diferencial (2) *forma um espaço vectorial real de dimensão n.*

Definição 3:

Qualquer base do espaço vectorial $S_0(I)$ designa-se por sistema fundamental de soluções (SFS) da equação diferencial (2).

Corolário 1

Se $\{x_1(t), \dots, x_n(t)\}$ é um sistema fundamental de soluções da equação (2), *então a sua solução geral é da forma $x(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t) + \cdots + c_nx_n(t)$*, onde $c_1, c_2, \dots, c_n$ são constantes reais arbitrárias.

Teorema 3

O conjunto das soluções da equação diferencial completa (1) *forma um espaço afim do espaço vectorial do teorema 2, isto é, a solução geral da equação* (1) *é da forma $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$, onde $x_h(t)$ é solução geral da equação homogénea associada* (2) *e $x_p(t)$ é uma qualquer solução particular de* (1).

Atendendo aos objectivos deste trabalho, torna-se de extrema importância o estudo do caso particular das equações diferenciais de segunda ordem e de coeficientes constantes reais. Neste sentido, a equação (1) passa a ter a seguinte forma:

$$x'' + a_1x' + a_2x = b(t), \tag{3}$$

onde a_1e a_2 são constantes reais e $b(t)$ é uma função continua em I.

Para encontrar as soluções da equação (3), atendendo ao teorema anterior, é necessário em primeiro lugar estudar a EDO homogénea associada, ou seja, as equações da forma:

$$x'' + a_1 x' + a_2 x = 0. \tag{4}$$

Para além disso, é conveniente introduzir alguns conceitos e propriedades.

Teorema 4 (Critério da independência linear das soluções)

Duas soluções $x_1(t)$ e $x_2(t)$ da equação diferencial (4)*, **são linearmente independentes** se e só se* $\begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x'_1(t) & x'_2(t) \end{vmatrix} = x_1(t)x_2{}'(t) - x_2(t)x_1{}'(t) \neq 0,$ *para todo o t .*

Da demonstração deste teorema permite concluir que a implicação $\Leftarrow$ não exige que x_1 e x_2 sejam soluções da equação (4).

De acordo com o corolário 1, para a determinação das soluções da equação (4) basta conhecer duas soluções linearmente independentes. A determinação de um S.F.S. da equação (4) passa por processo algébrico que envolve encontrar as raízes de uma equação construída à custa dos coeficientes a_1 e a_2.

Definição 4

*Chama-se **equação característico** associado à EDO de coeficientes constantes* (4) *à equação*

$$r^2 + a_1 r + a_2 = 0 \tag{5}$$

Atendendo a que a equação característica (5) é uma equação quadrática, pode-se obter uma única raiz real, duas raízes reais distintas ou duas raízes complexas conjugadas, de acordo com o sinal do binómio discriminante. As soluções da equação (4) estão relacionadas com a natureza das soluções da equação característica. Esta relação é dada pelo teorema 5.

Teorema 5

Considere-se a equação diferencial linear de ordem dois homogénea de coeficientes constantes (4).

1. *Se r_1 e r_2 são duas raízes reais distintas da equação característica* (5) *então* $\{e^{r_1 t}, e^{r_2 t}\}$ *constitui um SFS da equação* (4)*;*
2. *Se r_1é a única raiz real da equação característica* (5) *então* $\{e^{r_1 t}, te^{r_1 t}\}$ *constitui um SFS da equação* (4)*;*
3. *Se $\alpha \pm \beta i$ é um par de raízes complexas conjugadas da equação característica* (5)*, então* $\{e^{\alpha t}\, cos(\beta t)\,, e^{\alpha t}\, sin(\beta t)\}$ *constitui um SFS da equação* (4)*.*

Demonstração

A prova consiste em demonstrar, para cada tipo de raízes, que o sistema apresentado é um sistema fundamental de soluções, ou seja que os elementos que o constituem são soluções da equação (4) e linearmente independentes.

1. Para $x_1\,(t) = \mathrm{e}^{r_1 \mathrm{t}}$ determine-se as suas derivadas até à ordem 2. Assim tem-se que:

   $x'_1\,(t) = \mathrm{r}_1\mathrm{e}^{r_1\mathrm{t}}$ e $x''_1\,(t) = \mathrm{r}_1{}^2\mathrm{e}^{r_1\mathrm{t}}$.

   Substituindo em (4) vem que: $\mathrm{r}_1{}^2\mathrm{e}^{r_1\mathrm{t}} + \mathrm{a}_1\mathrm{r}_1\mathrm{e}^{r_1\mathrm{t}} + \mathrm{a}_2\mathrm{e}^{r_1\mathrm{t}} = 0$, ou seja, $\mathrm{e}^{r_1\mathrm{t}}(r_1{}^2 + a_1\mathrm{r}_2 + a_2) = 0$

   Dado que r_1 é solução da equação característica associada à equação diferencial (4), obtém-se a identidade $0 \equiv 0$.

   Logo $x_1\,(t)$ é solução da equação (4).

   De forma idêntica se conclui que $x_2(t) = \mathrm{e}^{r_2\mathrm{t}}$ é solução de (4).

   Prove-se, agora, que estas soluções são linearmente independentes.

   $$\begin{vmatrix} \mathrm{e}^{r_1\mathrm{t}} & \mathrm{e}^{r_2\mathrm{t}} \\ \mathrm{r}_1\mathrm{e}^{r_1\mathrm{t}} & \mathrm{r}_2\mathrm{e}^{r_2\mathrm{t}} \end{vmatrix} = \mathrm{e}^{r_1\mathrm{t}}\mathrm{r}_2\mathrm{e}^{r_2\mathrm{t}} - \mathrm{e}^{r_2\mathrm{t}}\mathrm{r}_1\mathrm{e}^{r_1\mathrm{t}} =$$

   $$= \mathrm{r}_2\mathrm{e}^{(r_1+r_2)\mathrm{t}} - \mathrm{r}_1\mathrm{e}^{(r_1+r_2)\mathrm{t}} =$$

   $$= \mathrm{e}^{(r_1+r_2)\mathrm{t}}(\mathrm{r}_2 - \mathrm{r}_1) \neq 0,$$

   dado que r_1 e r_2 são raízes reais distintas e $\mathrm{e}^{(r_1+r_2)\mathrm{t}} > 0\,, \forall\ \in \mathbb{R}$.

   Assim, pelo teorema 4, $x_1(t)$ *e* $x_2(t)$ são duas soluções linearmente independentes, pelo que $\{\mathrm{e}^{\mathrm{r}_1\mathrm{t}}, \mathrm{e}^{\mathrm{r}_2\mathrm{t}}\}$ constitui um SFS da equação (4).

2. Para $x_1\,(t) = \mathrm{e}^{r_1\mathrm{t}}$ já foi provado, no caso 1, que é solução da equação (4).

   Considere-se agora $x_2\,(t) = t\mathrm{e}^{r_1\mathrm{t}}$ e determine-se as suas derivadas até à ordem 2. Assim,

   $$x'_2\,(t) = \mathrm{e}^{r_1\mathrm{t}} + r_1 t\mathrm{e}^{r_1\mathrm{t}} \quad \text{e} \quad x''_2\,(t) = 2r_1\mathrm{e}^{r_1\mathrm{t}} + \mathrm{r}_1{}^2\mathrm{t}\mathrm{e}^{r_1\mathrm{t}}\,.$$

   Substituindo no primeiro membro da equação (4), vem

   $$2r_1\mathrm{e}^{r_1\mathrm{t}} + \mathrm{r}_1{}^2\mathrm{t}\mathrm{e}^{r_1\mathrm{t}} + \mathrm{a}_1\mathrm{e}^{r_1\mathrm{t}} + \mathrm{a}_1 r_1 t\mathrm{e}^{r_1\mathrm{t}} + \mathrm{a}_2 t\mathrm{e}^{r_1\mathrm{t}} =$$

   $$= \mathrm{e}^{r_1\mathrm{t}}(2r_1 + \mathrm{a}_1) + \mathrm{e}^{r_1\mathrm{t}}\mathrm{t}(\mathrm{r}_1{}^2 + \mathrm{a}_1 r_1 + \mathrm{a}_2) =$$

   $$= 0,$$

   tendo em conta que r_1 é raiz da equação (5) e que é de multiplicidade dois logo $\mathrm{r}_1 = -\frac{\mathrm{a}_1}{2}$.

   Provou-se então que $x_1(t)$ *e* $x_2(t)$ satisfazem a equação diferencial, ou seja, são soluções da equação (4).

   Averigúe-se, em seguida, que estas soluções são linearmente independentes

   $$\begin{vmatrix} \mathrm{e}^{r_1\mathrm{t}} & t\mathrm{e}^{r_1\mathrm{t}} \\ \mathrm{r}_1\mathrm{e}^{r_1\mathrm{t}} & \mathrm{e}^{r_1\mathrm{t}} + \mathrm{r}_1\mathrm{t}\mathrm{e}^{r_1\mathrm{t}} \end{vmatrix} = \mathrm{e}^{2r_1\mathrm{t}} + \mathrm{r}_1\mathrm{t}\mathrm{e}^{2r_1\mathrm{t}} - \mathrm{r}_1\mathrm{t}\mathrm{e}^{2r_1\mathrm{t}} = \mathrm{e}^{2r_1\mathrm{t}}$$

Dado que $e^{2r_1 t} > 0$ para todo o t, o determinante será sempre diferente de zero. Pelo teorema 4, as soluções são linearmente independentes, pelo que, $\{e^{r_1 t}, te^{r_1 t}\}$ constitui um SFS da equação (4).

3. Estude-se em primeiro lugar a independência linear das funções: $x_1(t) = e^{\alpha t}\cos(\beta t)$ e $x_2(t) = e^{\alpha t} sin(\beta t)$.

$$\begin{vmatrix} e^{\alpha t} cos(\beta t) & e^{\alpha t} sin(\beta t) \\ e^{\alpha t}(\alpha\, cos(\beta t) - \beta\, sin(\beta t)) & e^{\alpha t}(\alpha\, sin(\beta t) + \beta\, cos(\beta t)) \end{vmatrix} =$$

$$= e^{\alpha t} cos(\beta t)\ e^{\alpha t}(\alpha\, sin(\beta t) + \beta\, cos(\beta t)) - e^{\alpha t} sin(\beta t)\, e^{\alpha t}(\alpha\, cos(\beta t) - \beta\, sin(\beta t)) =$$

$$= e^{2\alpha t}\alpha\, sin(\beta t)\, cos\,\beta t + \beta e^{\alpha t} cos^2(\beta t) - e^{2\alpha t}\alpha sin(\beta t)\, cos(\beta t) + \beta e^{\alpha t} sin^2(\beta t) =$$

$$= \beta e^{\alpha t}$$

Pelo facto de $\beta \neq 0$ e $e^{\alpha t} > 0$ para todo o t, o determinante será sempre diferente de zero donde as funções são linearmente independentes (de acordo com a demonstração do teorema 4).

Resta provar que $x_1(t) = e^{\alpha t} cos(\beta t)$ é solução da equação (4). Determinem-se as suas derivadas até à ordem dois e substituam-se na equação no primeiro membro da equação (4).

$$\alpha^2 e^{\alpha t} cos(\beta t) - 2\alpha\beta e^{\alpha t} sin(\beta t) - \beta^2 e^{\alpha t} cos(\beta t) + a_1(\alpha e^{\alpha t} cos(\beta t) - \beta e^{\alpha t} sin(\beta t)) + a_2(e^{\alpha t} cos(\beta t)) =$$

$$= e^{\alpha t} cos(\beta t)\,(a_2 + a_1\alpha + \alpha^2 - \beta^2) + (-2\alpha\beta - a_1\beta) e^{\alpha t} sin(\beta t).$$

Atendendo a que as funções $e^{\alpha t}\cos(\beta t)$ e $e^{\alpha t}\sin(\beta t)$ são linearmente independentes (provado acima) pode inferir-se que a combinação linear obtida é nula apenas se cada um dos coeficiente for igual a zero. Prove-se que $a_2 + a_1\alpha + \alpha^2 - \beta^2 = 0$ e $-2\alpha\beta - a_1\beta = 0$.

Tendo em conta que as soluções da equação (5) são complexas conjugadas, da forma $\alpha \pm \beta i$, tem-se que $\alpha = -\frac{a_1}{2}$ e $\beta = \frac{\sqrt{4a_2 - a_1^2}}{2}$, pelo que:

$$a_2 + a_1\alpha + \alpha^2 - \beta^2 = a_2 - \frac{a_1^2}{2} + \frac{a_1^2}{4} - a_2 + \frac{a_1^2}{4} = 0$$

$$-2\alpha\beta - a_1\beta = \beta(-2\alpha - a_1) = \frac{\sqrt{4a_2 - a_1^2}}{2}\left(\frac{2a_1}{2} - a_1\right) = 0\ .$$

Desta forma, concluiu-se que $x_1(t) = e^{\alpha t} cos(\beta t)$ é solução da equação (4).

De igual modo se verifica que $x_2(t) = e^{\alpha t} sin(\beta t)$ é solução da equação (4).

Tendo em conta $x_1(t)$ e $x_2(t)$ são funções linearmente independentes e soluções da equação (4), tem-se que $\{e^{\alpha t} cos(\beta t), e^{\alpha t} sin(\beta t)\}$ constitui um SFS da mesma equação. $\square$

Estude-se, agora, a solução da EDO linear de ordem dois completa e de coeficientes constantes (3). O teorema 3 garante que a solução dessa equação é dada pela adição da solução da equação homogénea associada com uma das suas soluções particulares. Assim, atendendo a que já foi apresentado o sistema fundamental de soluções para a equação homogénea, resta-nos encontrar um processo para determinar uma qualquer solução particular. O método da variação das constantes arbitrárias, que se expõem em seguida, permite encontrar essa solução.

Teorema 6 (Método das variação das constantes arbitrárias)

Se $\{x_1(t), x_2(t)\}$ *for um SFS da equação homogénea associada à equação* (3) *e* $c_1(t)$ *e* $c_2(t)$ *são funções cujas derivadas satisfazem o sistema de Lagrange*

$$\begin{cases} c'_1(t)x_1(t) + c'_2(t)x_2(t) = 0 \\ c'_1(t)x_1'(t) + c'_2(t)x_2'(t) = b(t) \end{cases} \tag{6}$$

então $x_p(t) = c_1(t)x_1(t) + c_2(t)x_2(t)$ *é solução particular da equação diferencial completa* (3).

Demonstração

Inicia-se a demonstração provando que as funções $c_1(t)$ *e* $c_2(t)$ existem, ou seja, que existem as soluções do sistema de Lagrange o que será equivalente a garantir que existem $\mathrm{c'_1(t)}$ e $\mathrm{c'_2(t)}$. Utilizando um resultado da Álgebra Linear, que afirma que um sistema linear de *n* equações a *n* incógnitas é possível e determinado se o seu determinante principal for diferente de zero, pode garantir-se a existência e unicidade de $\mathrm{c'_1(t)}$ e $\mathrm{c'_2(t)}$. Ora, o sistema de Lagrange é linear e constituído por duas equações e duas incógnitas $(\mathrm{c'_1(t)}$ e $\mathrm{c'_2(t)})$ e o seu determinante principal é dado por $\begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x'_1(t) & x'_2(t) \end{vmatrix}$. Por hipótese $\{x_1(t), x_2(t)\}$ é um SFS da equação homogénea (4), logo as soluções $x_1(t)$ e $x_2(t)$ são linearmente independentes, donde o determinante anterior é diferente de zero e consequentemente o sistema tem uma solução única. Está assim provada a existência e unicidade de $\mathrm{c'_1(t)}$ e $\mathrm{c'_2(t)}$.

Resta demonstrar que $x_p(t) = c_1(t)x_1(t) + c_2(t)x_2(t)$ é solução de (3). Derivando x_p e tendo em consideração as condições do sistema (6) tem-se que:

$$x'_p(t) = c_1(t)x'_1(t) + c'_1(t)x_1(t) + c'_2(t)x_2(t) + c_2(t)x'_2(t) = c_1(t)x'_1(t) + c_2(t)x'_2(t);$$

$$x''_p(t) = c'_1(t)x'_1(t) + c_1(t)x''_1(t) + c'_2(t)x'_2(t) + c_2(t)x''_2(t) =$$

$$= c_1(t)x''_1(t) + c_2(t)x''_2(t) + b(t).$$

Substituindo estas funções no primeiro membro da equação (3) e simplificando, tem-se que:

$$c_1(t)x''_1(t) + c_2(t)x''_2(t) + b(t) + a_1c_1(t)x'_1(t) + a_1c_2(t)x'_2(t) + a_2c_1(t)x_1(t) + a_2c_2(t)x_2(t)$$

$$= b(t) + c_1(t)\big(x''_1(t) + a_1x'_1 + a_2x(t)\big) + c_2(t)\big(x''_2(t) + a_1x'_2(t) + a_2x_2(t)\big) =$$

$$= b(t),$$

dado que $x_1(t)$ e $x_2(t)$ são soluções de (4). Logo está provado que $x_p(t)$ é solução particular da equação diferencial completa (3). □

1.2 Sistema massa-mola

Esta secção é dedicada a exposição dos movimentos exercidos pelo sistema massa-mola, que correspondem a uma aplicação das equações diferenciais ordinárias lineares de ordem dois e com coeficientes constantes, estudadas anteriormente. A sua redacção teve por referências [1], [2], [7], [9] [10] e [22] e as figuras nela contidas foram retiradas das mesmas fontes.

Considere-se um sistema composto por mola flexível, suspensa verticalmente num suporte fixo, e um corpo de massa m que é colocado na sua extremidade. Este corpo provoca um alongamento na mola de acordo com a figura 1b). Defina-se que essa posição corresponde à posição de equilíbrio do sistema massa-mola.

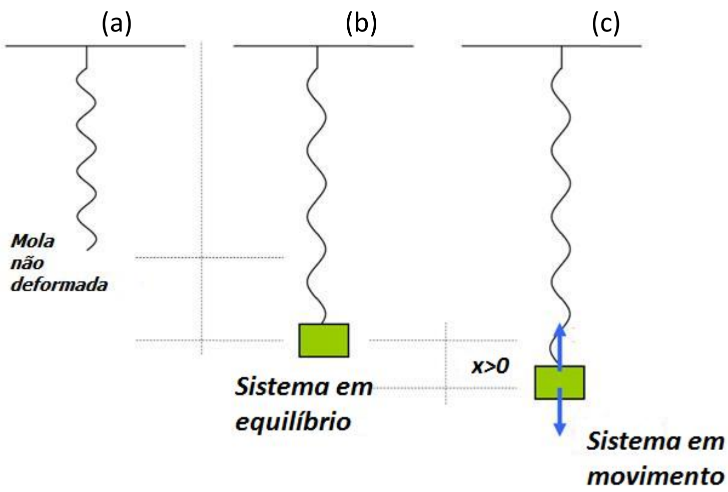


Figura 1 – Sistema massa-mola

O corpo quando oscila descreve um movimento na posição vertical, que se pretende estudar. Defina-se por $x(t)$ ou simplesmente x a posição que o corpo apresenta em função do tempo t. Assim, o corpo encontra-se na posição de equilíbrio quando $x = 0$. Sendo $x > 0$ para posições do corpo que se encontram abaixo da posição de equilíbrio e para $x < 0$ as posições do corpo que se encontram acima da posição de equilíbrio. Suponha-se, ainda, que a massa da mola é tão pequena relativamente à massa do corpo que se despreza.

Para encontrar uma relação que envolva x necessitamos de conhecer duas importantes leis da Física, nomeadamente, a lei de Hooke e a segunda lei de Newton.

A lei de Hooke estabelece que a força, $F_{1,}$ que a mola aplica no corpo, levando-o à sua posição de equilíbrio e designada por força restauradora, é proporcional à função que traduz a posição que o corpo apresenta, mas em sentido contrário. Desta forma, a lei de Hooke pode ser dada pela seguinte relação $F_1 = -kx$, sendo k designada a constante da mola.

A segunda lei de Newton define que a resultante das forças que actuam sobre o sistema é igual à massa vezes a aceleração, sendo a aceleração dada pela segunda derivada da função posição em ordem ao tempo. Assim, pode-se escrever que $F = mx''$.

Conforme as forças que são exercidas no sistema massa-mola ir-se-á obter movimentos distintos. Seguidamente, apresenta-se cada um desses movimentos harmónicos, a saber: simples, amortecido e forçado.

1.2.1 Movimento harmónico simples

O movimento harmónico simples parte do pressuposto que não são exercidas mais nenhuma força, para além da aplicada pela mola, e as características da mola não se alteram ao longo do tempo. Tendo em conta a lei de Hooke e a lei de Newton, obtém-se a EDO linear de segunda ordem e de coeficientes constantes: $mx'' = -kx$, ou seja, $mx'' + kx = 0$. Esta equação diferencial é designada pela equação do movimento harmónico simples e a sua solução corresponde à função que traduz a posição que o corpo apresenta em função do tempo.

Seguidamente serão efectuados alguns procedimentos no sentido de determinar a solução da referida equação diferencial.

Dividindo ambos os membros por m, tem-se $x'' + \frac{k}{m}x = 0$. Considere-se $\omega^2 = \frac{k}{m}$, então a equação anterior toma a forma:

$$x'' + \omega^2 x = 0 \tag{7}$$

As raízes da equação característica associada à equação (7) são $\pm\omega i$. Atendendo ao corolário 1 e ao teorema 5, a equação (7) admite como solução geral $x(t) = c_1\,cos(\omega t) + c_2\,sin(\omega t)$, com c_1 e c_2 constantes arbitrárias. Considerando $A = \sqrt{{c_1}^2 + {c_2}^2}$, $c_2 = Asin\phi$ e $c_1 = Acos\phi$, a solução anterior pode ser escrita, sem perda de generalidade, na forma: $x(t) = A\,cos(\omega t - \phi)$, com A e ϕ constantes arbitrárias.

Esta função trigonométrica é periódica com período $\frac{2\pi}{\omega}$, logo o corpo realiza $\frac{\omega}{2\pi}$ ciclos por segundo.

Um exemplo da representação gráfica do movimento harmónico simples para um determinado valor A e ω, sendo $A > 0$, encontra-se na figura 2.

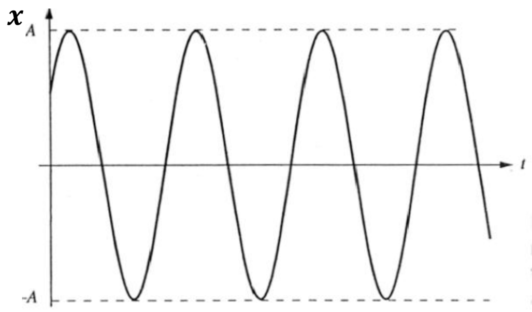


Figura 2 – Um exemplo da representação gráfica do movimento harmónico simples para uma situação em que $0 < x(0) < A$ e $x'(0) > 0$

1.2.2 Movimento harmónico amortecido

No sistema massa-mola, exposto na secção anterior, foi considerado que apenas é exercida a força aplicada pela mola. Esta situação é irreal, a não ser que o corpo esteja no vácuo perfeito.

Considere-se, agora, que sobre o sistema massa-mola é provocado um amortecimento. A força que resulta desse amortecimento, designada por força amortecedora, possui um sentido oposto ao do movimento e é proporcional à velocidade do corpo, ou seja à primeira derivada de x . Desta forma, existe uma constante β, designada constante de amortecimento, tal que $F = -\beta x'$, com $\beta > 0$. Nesta situação, a resultante das forças que actuam no sistema massa-mola é $-kx - \beta x'$. Assim, pela segunda lei de Newton vem que a equação do movimento harmónico amortecido é dada por: $mx'' = -kx - \beta x'$, isto é, $mx'' + \beta x' + kx = 0$. Dividindo por m e considerando, por conveniência algébrica, $2\lambda = \frac{\beta}{m}$ e $\omega^2 = \frac{k}{m}$, a equação anterior transforma-se em

$$x'' + 2\lambda x' + \omega^2 x = 0. \tag{8}$$

Atendendo ao teorema 5, a solução geral da equação diferencial (8) vai depender do tipo de raízes que a equação característica que lhe é associada apresenta. Assim, pode ter-se:

1) $\lambda^2 - \omega^2 > 0$.

Neste caso, a constante do amortecimento, β, é grande quando comparado com a constante da mola, k, por isso o movimento é designado por **super-amortecido**. Além disso, as raízes da equação característica são dois números reais distintos. Atendendo ao corolário 1, a solução geral da equação (8) é da forma: $x(t) = c_1\,\mathrm{e}^{\left(-\lambda t+\sqrt{\lambda^2-\omega^2}\right)t} + c_2\mathrm{e}^{\left(-\lambda t-\sqrt{\lambda^2-\omega^2}\right)t}$, com c_1 e c_2 constantes arbitrárias.

Este tipo de movimento caracteriza-se por o corpo quase não oscila e com o passar do tempo (depois de um tempo suficientemente grande) tende a parar na sua posição de equilíbrio, dado que as expressões $c_1\,\mathrm{e}^{\left(-\lambda+\sqrt{\lambda^2-\omega^2}\right)t}$ e $c_2\mathrm{e}^{-\left(\lambda+\sqrt{\lambda^2-\omega^2}\right)t}$ tendem para zero, quando $t \to +\infty$. Além disso, $x'(t)$ pode apresentar, no máximo, um zero, correspondente ao valor t de que verifique a condição $\mathrm{e}^{2\sqrt{\lambda^2-\omega^2}t} = \frac{c_2(\sqrt{\lambda^2-\omega^2}+\lambda)}{c_1(\sqrt{\lambda^2-\omega^2}-\lambda)}$.

Assim, uma possível representação gráfica do movimento harmónico super-amortecido pode ser ilustrada na figura 3.

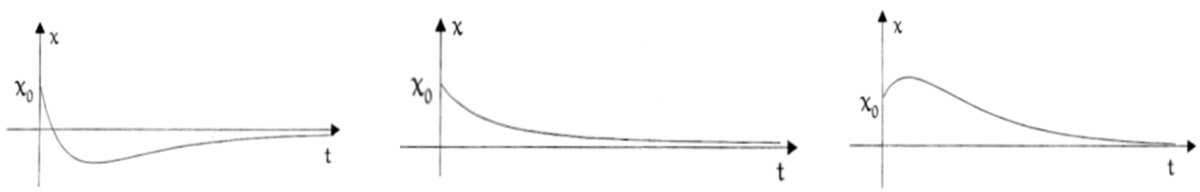


Figura 3 – Três exemplo do movimento harmónico super-amortecido para o caso de $x(0) > 0$

2) $\lambda^2 - \omega^2 = 0$.

Neste caso, a equação característica tem apenas uma raiz real $-\lambda$ de multiplicidade dois, de acordo com o corolário 1, a solução geral de (8) é da forma: $x(t) = c_1\,\mathrm{e}^{-\lambda t} + c_2 t\mathrm{e}^{-\lambda t}$, ou seja, $x(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}(c_1 + c_2 t)$, com c_1 e c_2 constantes arbitrárias.

O movimento descrito por esta função é designado por **criticamente amortecido**

Dado que $c_1 + c_2 t$ tem no máximo um zero positivo e $\mathrm{e}^{-\lambda t} \neq 0$, para todo o t, pode inferir-se que passa no máximo uma vez pela posição de equilíbrio. Por outro lado, $x'(t)$ pode anular-se, no máximo, uma única vez, pois $x'(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}[-\lambda(c_1 + c_2 t) + c_2]$ não tem mais do que um zero. A representação gráfica do movimento harmónico amortecido tem o mesmo aspeto do apresentado no caso anterior.

3) $\lambda^2 - \omega^2 < 0$.

Nesta situação, a constante de amortecimentos, β, é inferior à constante da mola, k, por isso o movimento descrito é designado por **sub-amortecido.** Além disso, tem-se que as raízes da equação característica associada à equação (8) são complexas conjugadas: $-\lambda \pm \sqrt{\omega^2 - \lambda^2}i$. Pelo corolário 1, a solução geral da referida equação corresponde a:

$x(t) = e^{-\lambda t}\left(c_1 \cos\sqrt{\omega^2-\lambda^2}\, t + c_2 \sin\sqrt{\omega^2-\lambda^2}\, t\right)$, com c_1 e c_2 constantes arbitrárias.

Considerando $A = \sqrt{{c_1}^2 + {c_2}^2}$, $c_2 = A\sin\phi$ e $c_1 = A\cos\phi$, a solução anterior pode ser escrita por: $x(t) = Ae^{-\lambda t}\cos\left(\sqrt{\omega^2-\lambda^2}\, t - \phi\right)$, com A e ϕ constantes arbitrárias.

O valor $\sqrt{\omega^2-\lambda^2}$ designa-se por quase frequência do movimento do sistema massa-mola.

Neste caso, à semelhança do anterior, tem-se que o corpo tende para a posição de equilíbrio a medida que o tempo aumenta. No entanto, ao contrário dos casos anteriores, o corpo apresenta um movimento oscilatório cujas oscilações decrescem exponencialmente. A posição do corpo, $x(t)$, vai estar compreendida entre $y_1 = Ae^{-\lambda t}$ e $y_2 = -Ae^{-\lambda t}$, pois o valor de $\cos\left(\sqrt{\omega^2-\lambda^2}\, t - \phi\right)$ varia entre -1 e 1, conforme é ilustrado na figura 4.

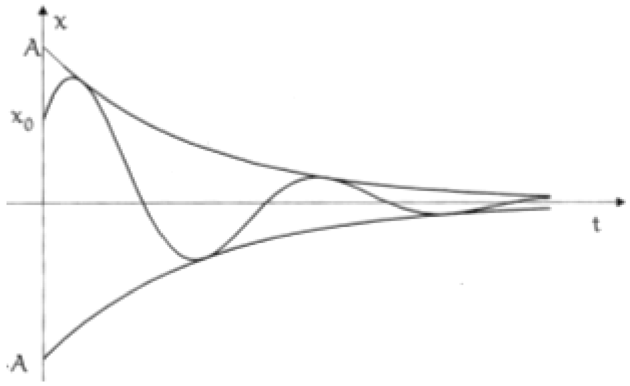


Figura 4 – Um exemplo da representação gráfica do movimento sub-amortecido para o caso de $x(0) > 0$ e $x'(0) > 0$

1.2.3 Movimento harmónico forçado

Analise-se, agora, a situação em que existe mais outra força, designada por força externa e representada por $b(t)$, a agir sobre o sistema massa-mola apresentado na secção anterior. Da segunda lei de Newton, obtém-se a seguinte EDO linear de coeficientes constantes: $mx'' = -kx - \beta x' + b(t)$, ou seja, $mx'' + \beta x' + kx = b(t)$. O movimento traduzido pela solução geral da equação diferencial anterior chama-se **movimento forçado**.

Tendo por base o objetivo do presente estudo, ir-se-á dar especial importância ao caso em que a função $b(t)$ é periódica. Assim, considere-se uma a força externa $b(t) = F_0 \sin\omega_0 t$, com $F_0 > 0$ e $\omega_0 > 0$.

A equação anterior escrever-se

$$x'' + 2\lambda x' + \omega^2 x = E_0\, sin(\omega_0 t), \tag{9}$$

com $E_0 = \frac{F_0}{m}$, $2\lambda = \frac{\beta}{m}$ e $\omega^2 = \frac{k}{m}$.

De acordo com o teorema 3, a equação (9) tem solução geral da forma $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$, pelo que o seu estudo envolve a determinação das soluções da equação homogénea associada e de uma das suas soluções particulares. Por outro lado, o estudo do movimento traduzido pela solução geral da equação (9) assume comportamento diferente conforme a existência ou não de uma força de amortecimento. Assim, pode-se considerar duas situações: $\beta > 0$ e $\beta = 0$.

Estude-se, em primeiro, o caso de $\beta > 0$, isto é, existe um certo amortecimento a atuar no sistema massa-mola. O movimento resultante designa-se por **forçado amortecido**. A função que descreve esse movimento corresponde à solução geral da equação diferencial (9).

Uma solução particular da equação diferencial (9) pode ser $x_p(t) = B\, sin\,(\omega_0 t + \delta)$, para $B = \frac{E_0}{\sqrt{(\omega^2-{\omega_0}^2)^2-4\lambda^2{\omega_0}^2}}$, $sin(\delta) = \frac{-2\lambda\omega_0}{\sqrt{(\omega^2-{\omega_0}^2)^2-4\lambda^2{\omega_0}^2}}$ e $cos(\delta) = \frac{\omega^2-{\omega_0}^2}{\sqrt{(\omega^2-{\omega_0}^2)^2-4\lambda^2{\omega_0}^2}}$.

Desta forma, a solução geral da equação (9) é dada pela adição da solução particular, anteriormente apresentada, com uma das expressões obtidas na secção anterior, de acordo com o sinal de $\lambda^2 - \omega^2$.

O movimento forçado amortecido resulta da sobreposição de um movimento periódico, com período $\frac{2\pi}{\omega_0}$ dada pela solução particular, com um movimento aperiódico dado pela solução da equação homogénea associada à equação (9). Neste sentido, verifica-se que o movimento, com o passar do tempo, é dado pela expressão de $x_p(t)$, pois $\lim_{t\to+\infty} x_h\,(t) = 0$. A figura 5 apresenta-se um exemplo da representação gráfica do movimento forçado amortecido.

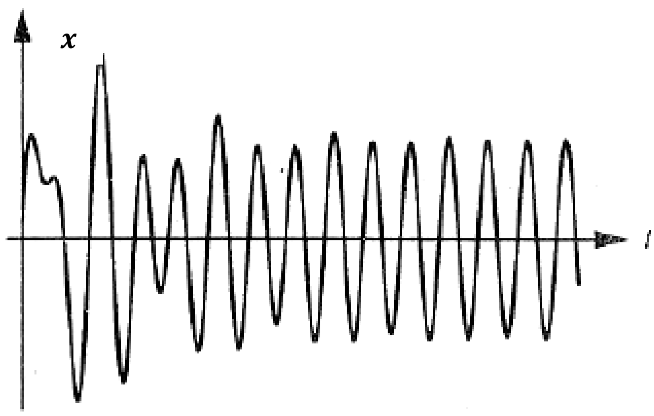


Figura 5 – Um exemplo da representação gráfica do movimento forçado com amortecimento

Estude-se, agora, o caso de $\beta = 0$, ou seja, não existe uma força de amortecimento, pelo que este tipo de movimento é designado por **forçado não amortecido**.

A equação (9) toma a forma:

$$x'' + \omega^2 x = E_0 \, sin \, \omega_0 t. \tag{10}$$

De acordo com o estudado em 1.2.1, a solução da equação homogénea associada à equação (10) é

$$x_h(t) = c_1 \, cos(\omega t) + c_2 \, sin(\omega t), \text{ com } c_1 \text{ e } c_2 \text{ constantes arbitrárias}$$

ou

$$x_h(t) = A \, cos(\omega t - \phi), \text{com } A \text{ e } \phi \text{ constantes arbitrárias}$$

Para encontrar uma solução particular da equação (10), considere-se dois casos: $\omega_0 = \omega$ e $\omega_0 \neq \omega$.

1) Para $\omega_0 = \omega$, isto é, a frequência da força externa é igual à frequência natural do oscilador. Este fenómeno é designado por **ressonância**.

A equação (10) toma a seguinte forma: $x'' + \omega^2 x = E_0 \, sin(\omega t)$. Uma solução particular da equação diferencial anterior pode ser $x_p(t) = -\frac{E_0}{2\omega} t \, cos \, (\omega t)$. Assim, a solução geral é

$$x(t) = A \cos(\omega t - \phi) - \frac{E_0}{2\omega} t \, cos \, (\omega t), \text{com } A \text{ e } \phi \text{ constantes arbitrárias}$$

Desta modo, o movimento resultante é a sobreposição do movimento harmónico simples com um movimento oscilatório de amplitude crescente, $\frac{E_0}{2\omega} t$, que tende para infinito.

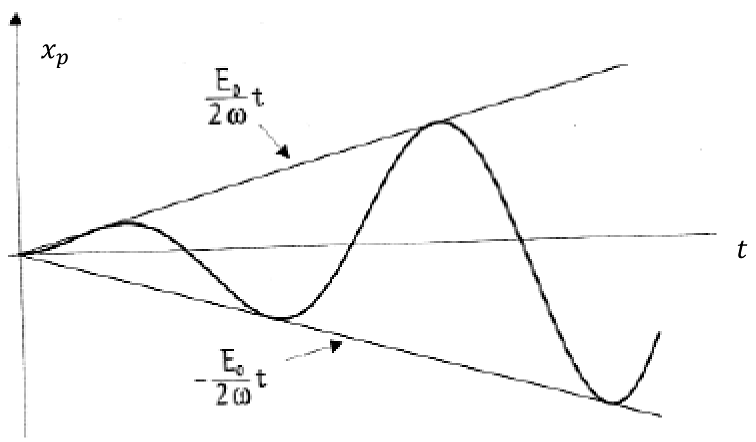


Figura 6 – Um exemplo da representação gráfica do movimento apresentado por uma solução particular, para o caso da ressonância

2) Para $\omega_0 \neq \omega$, isto é, a frequência da força externa é diferente da frequência natural, pode-se ter para solução particular da equação (10):

$$x_p(t) = \frac{E_0}{\omega^2-{\omega_0}^2} sin(\omega_0 t) \quad \text{ou} \quad x_p(t) = \frac{E_0}{\omega^2-{\omega_0}^2} (sin(\omega_0 t) - sin(\omega t)).$$

De facto, quer substituindo a primeira expressão quer a segunda e a sua respetiva segunda derivada na equação (10) obtém-se uma igualdade.

Verifique-se, por exemplo, a primeira expressão. A sua primeira derivada corresponde a $\frac{E_0\omega_0}{\omega^2-{\omega_0}^2} cos(\omega_0 t)$ e segunda derivada a $\frac{-E_0\,{\omega_0}^2}{\omega^2-{\omega_0}^2} sin(\omega_0 t)$.

Substituindo na equação (10) e efectuando algum cálculos, tem-se:

$$\frac{-E_0\,{\omega_0}^2}{\omega^2-{\omega_0}^2} sen(\omega_0 t) + \omega^2 \frac{E_0}{\omega^2-{\omega_0}^2} sin(\omega_0 t) = (-{\omega_0}^2 + \omega^2) \frac{E_0}{\omega^2-{\omega_0}^2} sin(\omega_0 t) = E_0\, sin\, \omega_0 t,$$

ou seja, que $x_p(t) = \frac{E_0}{\omega^2-{\omega_0}^2} sin(\omega_0 t)$ é solução particular da equação (10).

Assim, para a solução geral pode se optar por qualquer uma das seguintes funções:

$x(t) = c_1\, cos(\omega t) + c_2\, sin(\omega t) + \frac{E_0}{\omega^2-{\omega_0}^2} sin(\omega_0 t)$, com c_1 e c_2 constantes arbitrárias

ou

$x(t) = c_1\, cos(\omega t) + c_2\, sin(\omega t) + \frac{E_0}{\omega^2-{\omega_0}^2} (sin(\omega_0 t) - sin(\omega t))$, com c_1 e c_2 constantes arbitrárias

ou

$x(t) = A\, cos(\omega t - \phi) + \frac{E_0}{\omega^2-{\omega_0}^2} sin(\omega_0 t)$, com A e ϕ constantes arbitrárias.

Da análise da função que modela o movimento, verifica-se que existe uma sobreposição de dois movimentos. Um corresponde ao caso em que não há força externa, que é um movimento harmónico simples periódico com frequências natural ω. O outro é o movimento dado pela solução particular com frequência ω_0. Para analisar o movimento dado pela solução particular tem que se considerar três situações distintas que depende do valor de ω e de ω_0. Assim, se:

(i) $\frac{\omega}{\omega_0}$ representar um número não racional, o movimento dado pela solução particular é oscilatório, mas não é periódico.

Na figura 7 exibe a representação gráfica de um movimento com as características referidas.

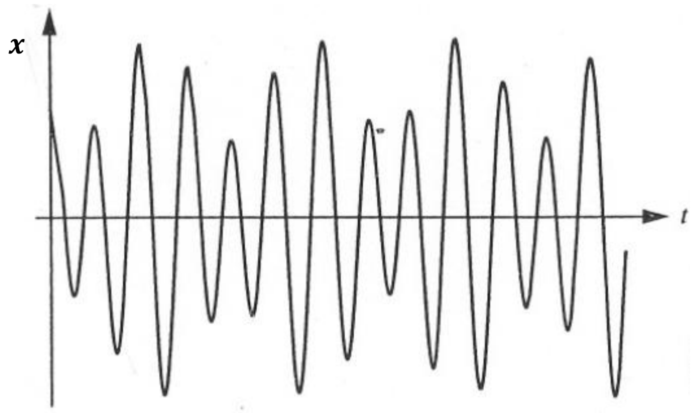


Figura 7 – Um exemplo da representação gráfica do movimento forçado não amortecido não periódico, para o caso de $x(0) > 0$ e $x'(0) < 0$

(ii) $\frac{\omega}{\omega_0}$ representar um número racional, o movimento da solução particular da equação (10) corresponde a um movimento periódico. Para averiguar a veracidade da afirmação, parte-se da solução particular da equação (10): $x_p(t) = \frac{E_0}{\omega^2-{\omega_0}^2}(sin(\omega_0 t) - sin(\omega t))$.

Dado que a fracção $\frac{\omega}{\omega_0}$ representa um número racional, pode-se escrever na forma de uma fracção irredutível. Assim, existem dois números inteiros p e q, tais que $\frac{p}{q} = \frac{\omega}{\omega_0}$. A função $sin(\omega_0 t)$ tem período $\frac{2\pi}{\omega_0}$, consequentemente $\frac{2\pi q}{\omega_0}$ também representa o seu período. De modo análogo, $\frac{2\pi p}{\omega}$ é o período de $sin(\omega t)$. Logo, $\frac{2\pi q}{\omega_0} = \frac{2\pi p}{\omega}$ corresponde ao período de $\frac{E_0}{\omega^2-{\omega_0}^2}(sin(\omega_0 t) - sin(\omega t))$.

3) Se ω for próximo de ω_0 e verificando-se as condições iniciais: $x(0) = x'(0) = 0$ obtém-se um dos mais interessantes e importantes movimentos, designado por **batimento**.

Para estas condições iniciais, a solução geral da equação (10), fica reduzida à solução particular, ou seja, $x(t) = \frac{E_0}{\omega^2-{\omega_0}^2}(sin(\omega_0 t) - sin(\omega t))$. Esta função pode ainda escreve-se na forma:

$$x(t) = \frac{2E_0}{\omega^2-{\omega_0}^2}\left(sin\left[\left(\frac{\omega_0-\omega}{2}\right)t\right]\cos\left[\left(\frac{\omega_0+\omega}{2}\right)t\right]\right).$$

Quando ω for próximo de ω_0, a diferença ω - ω_0 é pequena. Assim, a frequência do seno é muito menor que a do coseno. A representação gráfica do movimento resultante é do tipo do indicado na figura 8.

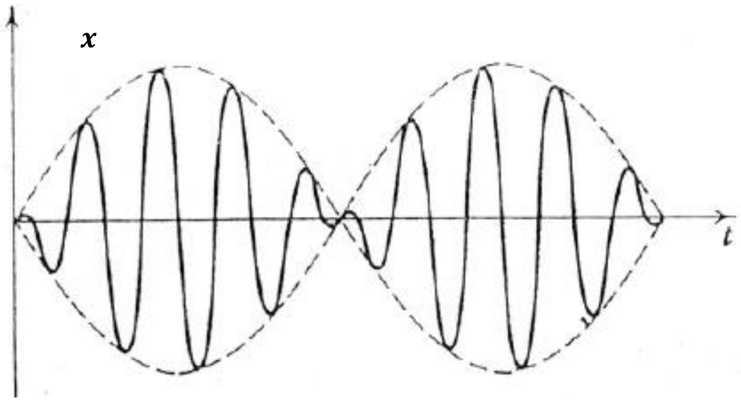


Figura 8 – Um exemplo da representação gráfica do movimento forçado não amortecido quando a diferença entre a frequência natural e a frequência externa é pequena

Designe-se por $A(t) = \frac{2E_0}{\omega^2 - {\omega_0}^2} sin\left[\left(\frac{\omega_0 - \omega}{2}\right) t\right]$ a amplitude, que é variável, do movimento descrito anteriormente. A função amplitude tem um grande período quando comparado com o do coseno. Na figura 9 é ilustrado o período de $A(t)$ **.**

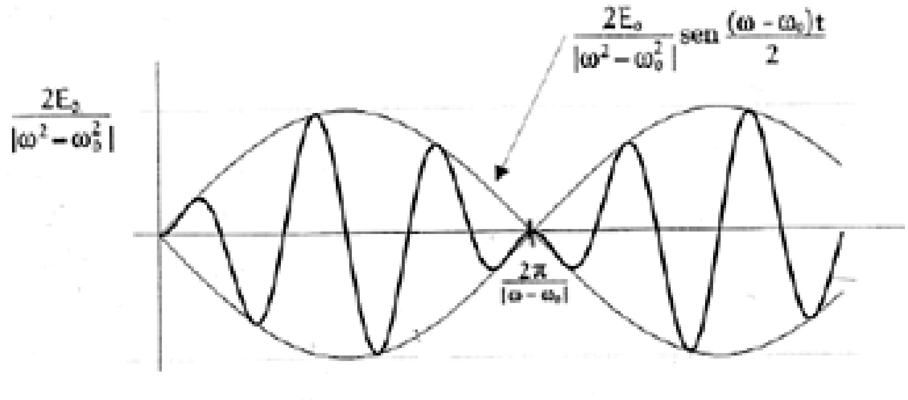


Figura 9 – Período de $A(t)$

1.3 Ponte de Tacoma Narrows

As fontes de referência desta secção foram [8] e [22]. As primeiras três figuras foram retiradas das mesmas fontes ou da internet e as restantes construídas no programa GeoGebra.

A ponte de Tacoma Narrows, situada no estado de Washington, foi começada a construir em novembro de 1938 e inaugurada em 1 de julho de 1940, sendo, na altura, uma das maiores pontes suspensas do mundo. Apesar de na sua construção estarem previstas a existência de oscilações, de imediato a ponte começou a exibir deslocamentos verticais, fora do normal, causados pelo vento, conforme se ilustra na figura 10.

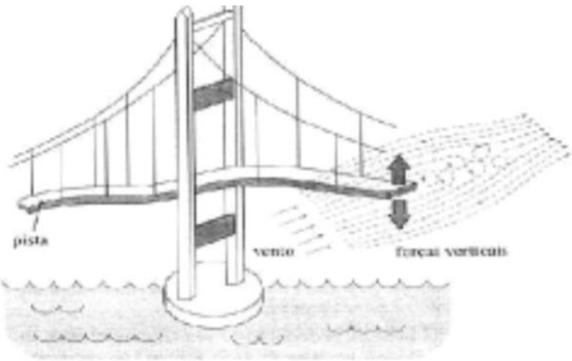


Figura 10 – Deslocamentos verticais na ponte de Tacoma Narrows

No dia sete de novembro de 1940, ventos que aumentaram de velocidade até aos 68Km/h, fizeram com que os deslocamentos se tornassem mais violentos. Após algum tempo a exibir deslocamentos verticais, deu-se uma mudança na vibração do tabuleiro central, tendo passado a apresentar deslocamentos rotacionais. A figura 11 permite visualizar os referidos deslocamentos.

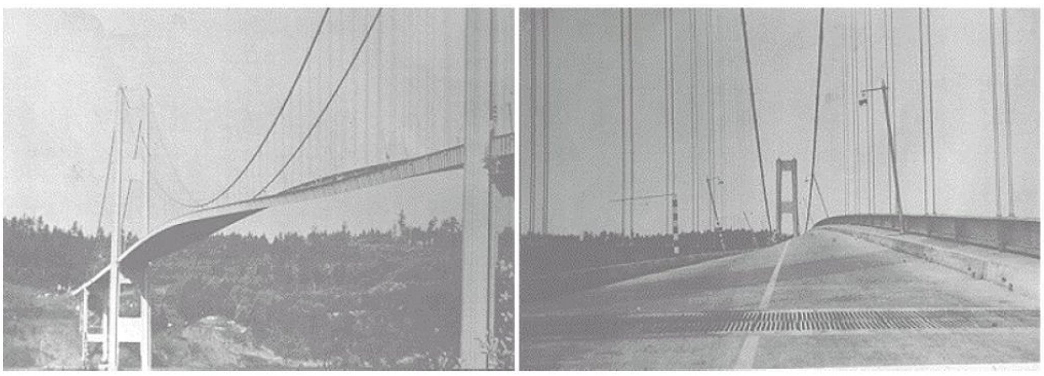


Figura 11 - Deslocamentos rotacionais na ponte de Tacoma Narrows

Cerca de uma hora depois, esses deslocamentos rotacionais tornaram-se de tal forma violentos que o tabuleiro central da ponte acabou por se romper e cair dentro de água, deixando apenas os cabos pendurados entre os pilares, conforme é ilustrado na figura seguinte.

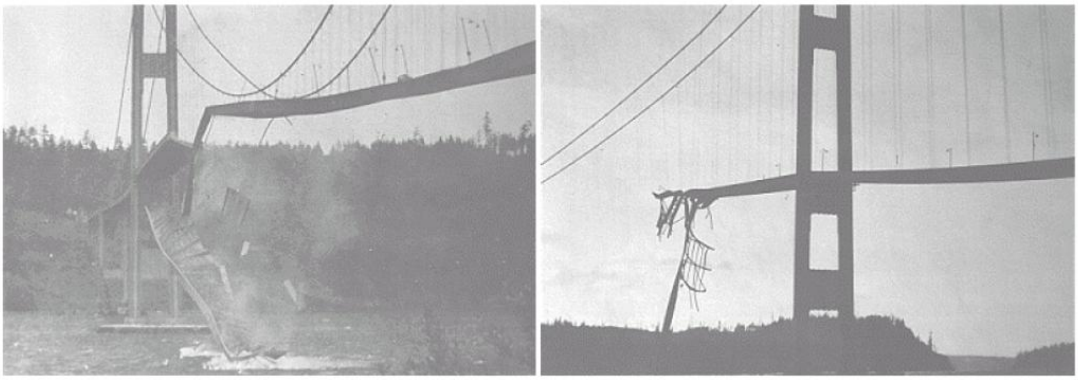


Figura 12 – Queda da ponte de Tacoma Narrows

Na altura, foi vinculado que a queda da ponte de Tacoma se deveu a um efeito de ressonância causado pela existência de ventos com frequências concordando com frequência natural da vibração da ponte. No entanto, investigações recentes, mencionadas nas principais fontes de referência desta secção, indicam que queda da ponte de Tacoma se deveu a causas mais complexa do que a ressonância.

Apresenta-se, em seguida, o modelo para o movimento de um cabo da ponte que é baseado nos princípios físicos de uma mola e na segunda lei de Newton, pelo que é expresso por uma EDO linear de ordem dois. Esta equação diferencial corresponde a uma simplificação da realidade, pois não se tem em consideração todas as características da ponte, e é similar às encontradas em recentes investigações.

Considere-se um único cabo vertical da ponte suspensa e suponha-se que ele funciona com uma mola rígida, mas com características diferentes para o caso de estar comprimido ou esticado. Assim, tem-se uma constante, correspondente à constante da mola, que será *a* quando o cabo está comprimido e *b* quando o cabo está esticado, de forma que $0 < a < b$.

Seja $x(t)$ a posição vertical do cabo, num certo instante de tempo t, sendo $x(t) = 0$, a posição de equilíbrio, correspondente ao comprimento natural do cabo. Assume-se que $x(t) > 0$ quando se tem uma posição abaixo da de equilíbrio, isto é, quando o cabo está esticado, e $x(t) < 0$ quando se tem uma posição acima da de equilíbrio, isto é, quando o cabo está comprimido.

À medida que são provocadas oscilações, sobre a influência de uma força aplicada, o cabo exerce uma força restauradora de bx, se $x > 0$, e ax, se $x < 0$. Assim, na ausência de amortecimento, o modelo para o movimento forçado é dado, de acordo com o parágrafo 1.2.3, por:

$$mx^{''} + F(x) = g(t), \tag{11}$$

com $F(x) = \begin{cases} bx, & x > 0 \\ ax, & x < 0 \end{cases}$, $g(t)$ a força aplicada e m a massa da secção da pista.

É de salientar que a equação diferencial (11) é linear em todo o intervalo em que x mantém o sinal.

Analise-se, em seguida, algumas soluções para este modelo através de um problema de valores iniciais.

Suponha-se que $m = 1,\ b = 4, a = 1,\ g(t) = sin(4t)$, que inicialmente o cabo se encontra na posição de equilíbrio e que $x^{'}(0) = \alpha$, com $\alpha > 0$.

A equação diferencial (11) toma a forma de:

$$x^{''} + F(x) = sin(4t), \tag{12}$$

com $F(x) = \begin{cases} 4x, & x > 0 \\ x, & x < 0 \end{cases}$.

Defina-se por primeiro ciclo completo como sendo o menor intervalo de tempo $[0, \xi]$ que decorre ente a posição inicial e a passagem pela mesma posição com $x'(\xi) > 0$; segundo ciclo completo o menor intervalo de tempo $[\xi, \eta]$ que ocorre entre o tempo ξ e a passagem pela mesma posição com $x'(\eta) > 0$.

Seguidamente resolve-se o problema de valores iniciais supracitado para dois ciclos completos.

1) Primeiro ciclo completo.

Para encontrar as soluções da equação diferencial (12) tem de se estudar, em separado, o caso de $x < 0$ e $x > 0$.

i) Para a situação de $x > 0$, a equação diferencial (12) corresponde

$$x^{''} + 4x = sin(4t). \tag{13}$$

De acordo com o exposto na secção 1.1, a determinação das soluções da equação diferencial (13) passa por encontrar as soluções da equação homogénea associada a essa equação e uma das suas soluções particulares. A equação característica da equação homogénea associada à equação diferencial (13) tem soluções $\pm 2i$. Logo, a solução da equação homogénea associada à referida equação é $x_h = c_1 sin(2t) + c_2 cos(2t)$, com c_1 e c_2 constantes arbitrárias.

Na secção 1.2.3 foi apresentada uma fórmula geral para solução particular do tipo da equação diferencial (13) como sendo $x_p(t) = \frac{E_0}{\omega^2 - {\omega_0}^2} sin(\omega_0 t)$. Neste sentido, a equação diferencial (13) tem para solução particular $x_p(t) = \frac{1}{2^2-4^2} sin(4t)$, ou seja, $x_p(t) = -\frac{1}{6} sin(2t)cos(2t)$.

Assim, a solução da equação geral diferencial (13) corresponde a

$$x(t) = c_1 sin(2t) + c_2 cos(2t) - \frac{1}{6} sin(2t)cos(2t), \tag{14}$$

com c_1 e c_2 constantes arbitrárias.

Calculando a derivada de $x(t)$ tem-se

$$x^{'}(t) = 2c_1 cos(2t) - 2c_2 sin(2t) - \frac{1}{3}[- sin^2(2t) + \cos^2(2t)], \tag{15}$$

com c_1 e c_2 constantes arbitrárias.

Atendendo à condição $x(0) = 0$, obtém-se que $c_2 = 0$. Sabendo que $x'(0) = \alpha$ é possível determinar o valor da constante c_1, substituindo t por 0 na equação (15). Desta forma, tem-se $c_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} + \alpha\right)$, pelo que se obtém $x(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} + \alpha\right) sin(2t) - \frac{1}{6} sin(2t)cos\ (2t)$, ou seja ,

$$x(t) = sin(2t)\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} + \alpha\right) - \frac{1}{6} cos\ (2t)\right], \tag{16}$$

para $\alpha > 0$.

Os zeros da função em (16) correspondem aos zeros de $sin(2t)$ pois $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} + \alpha\right) - \frac{1}{6}\cos\ (2t) \neq 0$, quando $\alpha > 0$. Na verdade se $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} + \alpha\right) - \frac{1}{6}\cos(2t) = 0$, então $\cos(2t) = 3\alpha + 1 > 0$ o que é impossível.

Assim, os zeros da função representada em (16) são da forma $\mathrm{t} = k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$. O primeiro zero positivo é $\frac{\pi}{2}$, o que significa que a função representada por (16) fica definida no intervalo de $\left[0\ , \frac{\pi}{2}\right]$.

Tendo em consideração o valor de c_1 e c_2, substituindo t por $\frac{\pi}{2}$ na equação (15), obtém-se $x^{'}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{2}{3} - \alpha$.

Da física, sabe-se que o valor absoluto de $x'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ corresponde à velocidade no instante $\frac{\pi}{2}$ e o seu sinal indica o sentido do movimento. Logo, a extremidade do cabo passa pela primeira vez pelo ponto de equilíbrio ao fim de $\frac{\pi}{2}$ unidades de tempo com uma velocidade de $\frac{2}{3} + \alpha$, para uma posição abaixo da posição de equilíbrio.

ii) Para a situação de $x < 0$, a equação diferencial (12) corresponde

$$x'' + x = sin(4t) \tag{17}$$

Recorrendo às mesmas fontes do caso exposto anteriormente e procedendo da mesma forma ir-se-á encontrar a solução da equação (17). As soluções da equação característica associada à equação diferencial homogénea da equação diferencial (17) são $\pm i$. Logo a solução da equação homogénea associada à equação diferencial (17) é $x_h = c_1 sin(t) + c_2 cos(t)$, com c_1 e c_2 constantes arbitrárias. Atendendo a que $x_p(t) = \frac{1}{1-16}\sin(4t) = -\frac{2}{15} sin(2t)\cos(2t)$ é uma solução particular da equação diferencial (17), esta tem solução geral

$$x(t) = c_1 sin(t) + c_2 cos(t) - \frac{2}{15} sin(2t)cos(2t). \tag{18}$$

com c_1 e c_2 constantes arbitrárias.

A derivada de $x(t)$ corresponde

$$x'(t) = c_1 cos(t) - c_2 sin(t) - \frac{4}{15}[-sin^2(2t) + cos^2(2t)], \tag{19}$$

com c_1 e c_2 constantes arbitrárias.

Neste caso, as condições iniciais são $x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ e $x'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{2}{3} - \alpha$. Da primeira condição obtém-se que $c_1 = 0$ e da segunda $c_2 = \frac{2}{5} + \alpha$. Assim, a solução geral da equação diferencial (17) toma a forma de $x(t) = \left(\frac{2}{5} + \alpha\right) cos(t) - \frac{2}{15} sin(2t)cos(2t)$, ou seja,

$$x(t) = cos(t)\left[\left(\frac{2}{5} + \alpha\right) - \frac{4}{15} sin\,(t) cos\,(2t)\right]. \tag{20}$$

Os zeros da função representada em (20) correspondem ao zeros do $cos(t)$. De facto se $\left(\frac{2}{5} + \alpha\right) - \frac{4}{15} sin(t)\, cos\,(2t) = 0$, então $sin\,(t)\cos(2t) = \frac{15}{4}\left(\frac{2}{5} + \alpha\right)$ que é um absurdo, pois $\frac{15}{4}\left(\frac{2}{5} + \alpha\right)$ >1. Logo, $\left(\frac{2}{5} + \alpha\right) - \frac{4}{15} sin(t)\, cos\,(2t) = 0$ é impossível.

Assim, os zeros da função em (20) são dados por $t = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

O primeiro zero após $\frac{\pi}{2}$ corresponde a $\frac{3\pi}{2}$, pelo que a função em (20) tem domínio no intervalo $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

Na figura 13 apresenta-se a ilustração gráfica do primeiro ciclo completo.

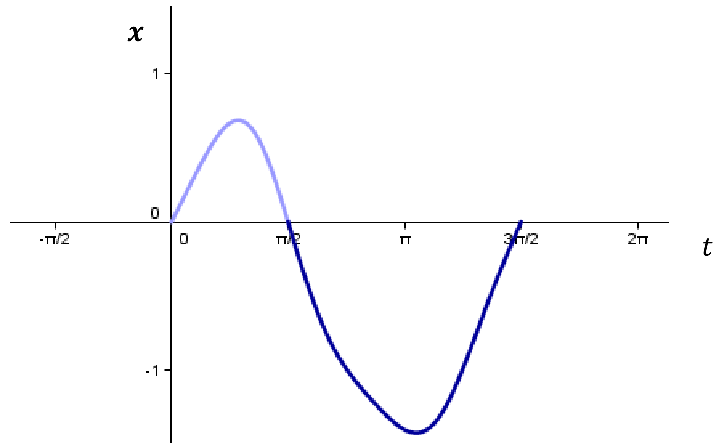


Figura 13 - Representação gráfica do primeiro ciclo completo para α =1

Substituindo $\frac{3\pi}{2}$ na função dada por (19) e tendo em atenção os valores de c_1 e c_2 obtém-se que $x'\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{2}{15} + \alpha$. O que significa que a extremidade do cabo passa novamente pelo ponto de equilíbrio com uma velocidade de $\frac{2}{15} + \alpha$, para uma posição acima da posição de equilíbrio.

2) Estude-se agora o segundo ciclo completo que começa em $\frac{3\pi}{2}$ unidades de tempo.

i) Para a situação de $x > 0$, a posição da extremidade do cabo é dada pela equação (14) para as condições inicias: $x\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$ e $x'\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{2}{15} + \alpha$. Assim, por substituição de $\frac{3\pi}{2}$ na equação (14) e (15) obtém-se, respetivamente, $c_2 = 0$ e $c_1 = -\frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{7}{15}\right)$. Desta forma, a equação (14) se transforma em $x(t) = -\frac{1}{2}\left(\frac{7}{15} + \alpha\right) sin(2t) - \frac{1}{6} sin(2t)cos\,(2t)$, ou seja,

$$x(t) = sin(2t)\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{7}{15} + \alpha\right) - \frac{1}{6} cos\,(2t)\right]. \tag{21}$$

Os zeros da função anterior correspondem aos da função $sin(2t)$, devido a $-\frac{1}{2}\left(\frac{7}{15} + \alpha\right) - \frac{1}{6} co\,s(2t)$ ser diferente de zero. Assim, o primeiro zero da função em (21) a seguir a $\frac{3\pi}{2}$ é 2π, o que significa que esta fica definida no intervalo de a $\frac{3\pi}{2}$ a 2π.

Tendo em consideração a função dada por (15) e os actuais valores de c_1 e c_2, conclui-se que a sua derivada no ponto 2π é $-\frac{4}{5} - \alpha$. Assim, a extremidade do cabo passa pela posição de equilíbrio ao fim de 2π unidades de tempo com uma velocidade de $\frac{4}{5} + \alpha$, para uma posição acima da posição de equilíbrio.

ii) No caso de em que $x < 0$, a equação (18), para as condições iniciais $x(2\pi) = 0$ e $x'(2\pi) = -\frac{4}{5} - \alpha$, toma a forma: $x(t) = -\left(\frac{8}{15} + \alpha\right) sin(t) - \frac{2}{15} sin(2t) cos(2t)$, isto é,

$$x(t) = sin(t)\left[-\left(\frac{8}{15} + \alpha\right) - \frac{4}{15} cos\,(\mathrm{t}) cos\,(2t)\right]. \quad (22)$$

Os zeros da função anterior correspondem aos da função $sin(t)$, pelo facto de $-\left(\frac{8}{15} + \alpha\right) - \frac{4}{15} cos\,(\mathrm{t}) cos\,(2t)$ ser diferente de zero. Desta forma, o primeiro zero da função defina por (22), maior que 2π, é 3π, logo esta função fica definida no intervalo de 2π a 3π.
Na figura 14 encontra-se a representação gráfica dos dois primeiros ciclos completos

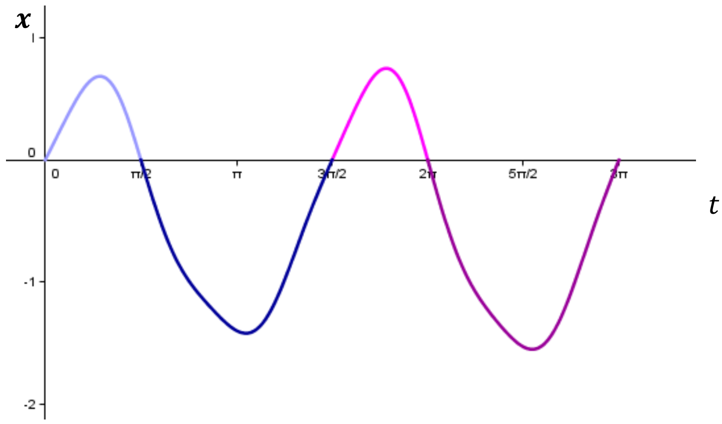


Figura 14 - Representação gráfica dos dois primeiros ciclo completo para α =1

A derivada da função em (22) no instante 3π unidades de tempo é $\frac{4}{15} + \alpha$, ou seja, a extremidade do cabo passa pela posição de equilíbrio com uma velocidade de $\frac{4}{15} + \alpha$, para uma posição acima da posição de equilíbrio.

Face ao exposto, conclui-se que a velocidade no início de cada ciclo aumenta em $\frac{2}{15}$, o que faz com que a amplitude das oscilações também aumente. Esta situação é ilustrada na figura 15. Nesta figura encontram-se representadas graficamente as funções dadas por (16), (20), (21) e (22), nos seus respectivos domínios, e as coordenadas dos extremos.

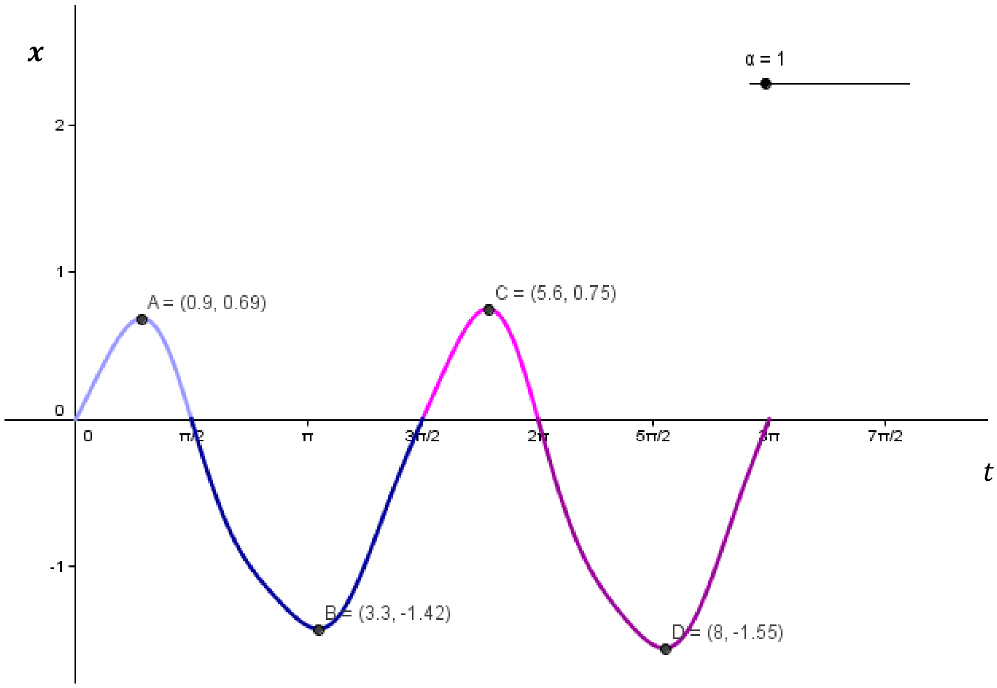


Figura 15 – Representação gráfica das funções em (16), (20), (21) e (22), nos seus respectivos domínios, para $\propto = 1$.

Assim, conclui-se que o modelo apresentado traduz que foram oscilações que aumentaram de amplitude, com o decorrer do tempo, a causa da queda da ponte de Tacoma Narrows. Note-se, ainda, que não ocorre o fenómeno de ressonância, dado que a frequência da força externa é 4, sendo diferente da frequência natural 2 ou 1.

Capitulo II - Projeto Educacional II

O ensino das equações quadráticas começa no terceiro ciclo, mais propriamente no oitavo ano. Nesse ano, o seu estudo restringe-se às situações que resultam da aplicação dos casos notáveis da multiplicação. No novo ano são ampliados os conhecimentos a todas as equações do segundo grau, completas e incompletas e os respectivos procedimentos para a sua resolução.

Ao longo da minha carreira profissional tenho constatado que muitas das dificuldades que os alunos apresentam na Matemática estão relacionadas com a ausência do verdadeiro significado do conceito e com a utilidade que esses conceitos poderão ter no dia-a-dia. Muitos alunos veem a Matemática, nomeadamente a Álgebra, como algo inatingível e abstrato, que se limita a repetir procedimentos rotineiros. No tópico Equações do segundo grau, este paradigma é muito frequente.

Por outro lado, sabe-se que a resolução de problemas favorece a aquisição de modos de pensar que podem conduzir a uma melhor aprendizagem.

Tendo em vista estes pressupostos, desenvolveu-se um conjunto de atividades, aplicáveis ao terceiro ciclo e ao ensino secundário, que pretendem realçar a importância das equações quadráticas na modelação matemática e, consequentemente, na resolução de problemas. Estas tarefas são constituídas por problemas reais que estabelecem aplicações das equações quadráticas em campos como a Geometria e Números e Operações.

Desta forma, pretende-se evitar uma exploração algébrica como um conjunto de regras e procedimentos a memorizar. No entanto, para que os alunos resolvem os problemas propostos, é necessário terem presentes os conhecimentos e os procedimentos utilizados na determinação das soluções das referidas equações.

2.1. Planificação das atividades

Nesta secção são apresentadas as diversas atividades elaboradas para este projeto e definida a forma como serão desenvolvidas. Essas atividades tiveram como principais fontes de inspiração [5],[6], [7], [12], [13], [15],[16], [17], [18], [19] e [20]. As tarefas destinam-se aos alunos do oitavo, nono e décimo anos de escolaridade e tiveram em consideração os conhecimentos anteriormente adquiridos.

2.1.1 Oitavo ano

Para o oitavo ano foi planificada a tarefa intitulada "Sequência e equações do segundo grau". Esta tarefa, que consta do anexo 1, tem como principal objetivo resolver problemas de sequências através de equações do segundo grau.

Objetivos específicos	Traduzir o problema através de uma expressão Resolver equações do 2º grau através da lei do anulamento do produto Criticar e interpretar as soluções da equação do 2º grau no contexto de um problema
Organização da turma	Trabalho de grupo com três ou quatro elementos
Material	Ficha de trabalho Papel e material de escrita
Duração	90 minutos

Inicia-se a aula com a apresentação da tarefa e informam-se os alunos que devem resolvê-la de forma autónoma.

Após a resolução da tarefa, haverá um momento de discussão geral de forma a sintetizar as conclusões obtidas por cada grupo.

No final da aula os alunos respondem a um questionário.

2.1.2 Nono ano

Para o nono ano foram programadas duas tarefas denominadas por "Problemas com equações do segundo grau" e "Caça às equações".

2.1.2.1 Tarefa – Problemas com equações do segundo grau

A tarefa que se encontra no anexo 4 tem por finalidade a resolução de problemas de modelação de situações reais usando procedimentos algébricos de complexidade crescente. Além disso, permite estabelecer a conexão entre as equações do segundo grau com a Geometria e os Números e Operações.

Objetivos específicos	Interpretar o enunciado de um problema Traduzir o problema por meio de uma equação do 2º grau Encontrar o modelo matemático que traduz o problema Resolver equações do 2º grau com uma incógnita (completas e incompletas) Criticar e interpretar as soluções da equação do 2º grau no contexto de um problema
Organização da turma	Trabalho de grupo com três ou quatro elementos.
Material	Ficha de trabalho Papel e material de escrita
Duração	45 minutos

Inicia-se a aula com a apresentação da tarefa e informam-se os alunos que devem resolvê-la de forma autónoma.

No final da aula haverá um momento de discussão geral de forma a sintetizar as conclusões obtidas por cada grupo.

2.2.2.2 Tarefa – Caça às equações

Com o intuito de averiguar se os alunos compreenderam o que é uma equação do segundo grau foi elaborada a tarefa que consta do anexo 6.

Objetivos específicos	Formular questões de modo a ter um problema que envolva equações do segundo grau Traduzir o problema através de uma expressão.
Organização da turma	Trabalho de pares
Material	Ficha de trabalho Papel e material de escrita
Duração	45minutos

Inicia-se a aula com a apresentação da tarefa e informam-se os alunos que devem resolvê-la de forma autónoma.

Após a resolução da tarefa, haverá um momento de discussão geral de forma a sintetizar as conclusões obtidas por cada grupo.

No final da aula os alunos respondem a um questionário.

2.1.3 Décimo ano

Para o décimo ano foram projetadas várias atividades que se podem dividir em dois grupos: problema do canteiro e mundo de algumas cónicas.

2.1.3.1 Tarefa – Problema do canteiro

A tarefa intitulada o "Problema do canteiro", que consta do anexo 9, tem como principal finalidade analisar uma situação da vida real identificando o modelo matemático que permite a sua interpretação e resolução. Esta tarefa, centrada no tema função quadrática, estabelece a conexão entre a Geometria e a Álgebra.

Prevendo-se algumas dificuldades na primeira questão e, consequentemente, a não realização das restantes alíneas, por parte de alguns alunos que não têm demonstrado aptidão pela disciplina, foi elaborada uma tarefa complementar. Esta tarefa está orientada para que, com o auxílio das funções do programa GeoGebra, os alunos encontrem o modelo matemático aplicado ao problema.

Objetivos específicos	Interpretar o enunciado de um problema Determinar o modelo matemático que permite a sua interpretação e resolução Resolver equações e inequações do 2º grau com uma incógnita Interpretar e criticar resultados no contexto do problema
Organização da turma	Trabalho de pares
Material	Ficha de trabalho Computador com o programa GeoGebra Papel e material de escrita
Duração	90 minutos

Inicia-se a aula com a distribuição da tarefa e informam-se os alunos que devem resolvê-la de forma autónoma.

Após a resolução da tarefa haverá um momento de discussão geral de forma a sintetizar as conclusões obtidas por cada par.

No final da aula os alunos respondem a um questionário.

2.1.3.2 Mundo de algumas cónicas

Para abordar a definição de parábola e de elipse como lugar geométrico, uma vez que estes temas são considerados facultativos no programa do décimo ano, elaborou-se uma apresentação em PowerPoint e uma tarefa.

A tarefa será dividida em duas partes. Na primeira, os alunos terão de realizar um conjunto de instruções no programa GeoGebra para obter uma parábola. Na segunda parte, pretende-se que os alunos estabeleçam uma relação entre o conjunto dos pontos obtidos e a reta e o ponto inicialmente construídos. Desta forma, pretende-se que cheguem ao conceito de parábola como lugar geométrico. No anexo 12 encontra-se um exemplar desta tarefa.

Objetivos específicos	Construir uma parábola Definir parábola como lugar geométrico
Organização da turma	Trabalho de pares
Material	Ficha de trabalho Papel e material de escrita
Duração	20 minutos

No PowerPoint são apresentadas a definição de parábola e de elipse, as suas propriedades focais e algumas das suas aplicações. No anexo 13 encontram-se os respetivos slides.

Inicia-se a aula com a apresentação do primeiro slide e, em seguida, pede-se aos alunos para resolverem a tarefa. Após a resolução da tarefa, serão apresentados os restantes diapositivos.

O Desenvolvimento destas atividades decorrerá durante uma aula de 90 minutos.

2.2. Desenvolvimento das atividades

Neste parágrafo é apresentado o desenvolvimento em sala e aula das diversas atividades anteriormente planificadas.

Todas as atividades planificadas foram desenvolvidas em turmas que não leciono, pelo que tive de solicitar autorização para as poder realizar, às respetivas professoras titulares das turmas. Além disso, cada uma das professoras titulares da turma também estive presente na aula.

2.2.1 Oitavo ano

A tarefa destinada a este ano de escolaridade, que consta no anexo 1, foi aplicada na turma C do oitavo ano, que tem 25 alunos. A turma em causa é caraterizada como simpática, possui alguns alunos que têm apresentado um bom desempenho na disciplina de Matemática.

Durante o desenvolvimento da tarefa, as professoras limitaram as suas funções a verificar se o trabalho desenvolvido pelos grupos ia no sentido da resolução correta das atividades propostas.

As poucas dúvidas que surgiram até à alínea g) diziam respeito apenas a questões de interpretação do enunciado. Na alínea g), e tendo por base o efetuado na alínea f), os alunos de imediato chegaram a uma expressão algébrica para o termo geral da sequência. Encontrar uma segunda expressão constituiu alguma dificuldade para alguns grupos, sendo mesmo necessário dizer-lhes "*Que figura geométrica vos faz lembrar a imagem?*". Perante a nova informação, os alunos mais perspicazes relacionaram-na com um quadrado do qual lhe é retirado um elemento. Nos mesmos grupos, para resolverem a alínea h), foi ainda sugerida a utilização da expressão algébrica $(n+1)^2-1$, anteriormente encontrada.

No final da aula houve um momento de discussão geral, no qual participaram todos os grupos, de forma a sintetizar as conclusões e a esclarecer possíveis dúvidas. Nesse momento, concluiu-se que todos os grupos conseguiram realizar a tarefa com sucesso.

Na resolução desta tarefa, verificou-se que a maioria dos alunos não apresentou grandes dificuldades, no entanto alguns não identificaram de imediato um padrão numérico associado à sequência, por isso necessitaram de construir uma figura para poderem responder às alíneas d) e e). Além disso, alguns grupos tiveram dificuldades em encontrar uma segunda expressão para o padrão.

No anexo 2 encontra-se um exemplo da resolução desta tarefa apresentada por um dos grupos da turma que identificou com facilidade o padrão numérico.

2.2.2 Nono ano

As tarefas planificadas para o nono ano foram realizadas pela turma D. Esta turma é constituída por 17 alunos e apresenta um fraco aproveitamento à disciplina de Matemática.

2.2.2.1 Tarefa – Problemas com equações do 2º Grau (Anexo 4)

O trabalho de aula começou com a apresentação da tarefa aos alunos e a definição dos grupos de trabalho. Seguidamente cada grupo de forma autónoma resolveu os problemas propostos.

Nas questões um e dois os alunos não apresentaram grandes dificuldades. Quanto à questão três, a identificação do termo geral da sequência tornou-se o maior obstáculo à sua resolução. Ao serem fornecidas pequenas indicações, do género “elabora um esquema.”, essa dificuldade foi-se diluindo.

Quando todos os grupos acabaram a tarefa restava pouco tempo para o final da aula, pelo que só se realizou a discussão para o problema três, por ter sido o que apresentou maior dificuldade. Verificou-se que todos os grupos conseguiram realizar a tarefa com sucesso, contudo alguns dos alunos ainda não tinham compreendido o padrão numérico que dá o número de apertos de mão em função do número de pessoas.

No anexo 5 encontra-se um exemplo da resolução desta tarefa apresentada por um dos grupos da turma.

2.2.2.2 Tarefa – Caça às equações (Anexo 6)

Iniciou-se a aula informando os alunos que iriam resolver uma tarefa em trabalho de pares e de forma autónoma. Seguidamente, apresentou-se a tarefa.

Durante o seu desenvolvimento, as professoras limitaram as suas funções a verificar se o trabalho desenvolvido pelos pares ia no sentido da resolução correta. Durante esse tempo não foi prestada qualquer informação, apenas se anotaram as dificuldades apresentadas pelos alunos, de modo a gerir o momento da discussão geral. Nesta fase, há a realçar o entusiasmo demonstrado pelos alunos, principalmente pelos que não têm manifestado predisposição para a aprendizagem.

No momento de discussão geral todos os alunos mostraram vontade de participar e de virem colocar no quadro a sua resposta. A metodologia utilizada foi no sentido de escolher em primeiro lugar os que não tinham a sua resposta totalmente correta, de modo a levá-los a perceber os seu erros e a tentarem encontrar a resposta adequada. Assim, na questão 2, verificou-se que alguns alunos apresentaram a fórmula da área do círculo como sendo a equação pedida. Desta forma, constatou-se haver alunos que ainda não tinham interiorizado o conceito de equação do segundo grau. Outra dificuldade apresentada corresponde a enunciar a equação que traduz o problema. Esta situação foi notória nas questões 3 e 4, em que os alunos formularam corretamente a questão, mas não foram capazes de apresentar a equação que permitia resolver o problema. Assim, constata-se que a definição da incógnita e a tradução da linguagem corrente para linguagem matemática não é um processo acessível a muitos dos alunos da turma.

No anexo 7 encontra-se um exemplo da resolução desta tarefa apresentada por um dos pares.

2.2.3. Décimo ano

As tarefas planificadas para este ano de escolaridade foram realizadas pela turma C do décimo ano e decorreram no Laboratório de Matemática, sala equipada com computadores e quadro interativo. A turma é constituída por 20 alunos, apresentando, na disciplina de Matemática, um aproveitamento muito heterogéneo.

2.2.3.1 Tarefa – Problema do canteiro (Anexo 7)

Iniciou-se o trabalho sem apresentação prévia da tarefa. De imediato todos os pares se mostraram empenhados e cuidadosos na sua exploração. Contudo, tal como inicialmente foi previsto, alguns pares mostraram muitas dificuldades na primeira questão, principalmente dois dos grupos. Perante essas dificuldades foi-lhes dada a tarefa complementar à qual aderiram com muito entusiasmo, uma vez que iam utilizar os computadores. Este grupo de alunos seguiu sem grandes dificuldades as instruções dadas pela tarefa e conseguiu obter o modelo matemático para a situação problema dada. Na figura 16 apresenta-se a resolução obtida no programa de geometria dinâmica por um desses grupos.

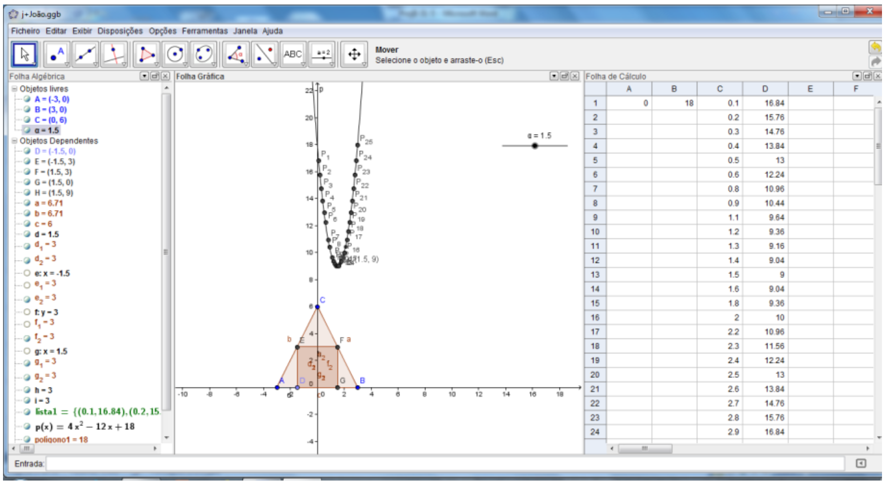


Figura 16 – Construção obtida por um dos grupos do 10º C

Após encontrarem a função que modela o problema, estes grupos foram resolver as restantes questões da tarefa, no entanto, dadas as suas dificuldades a nível de cálculo, não conseguiram apresentar as respostas totalmente corretas.

Os restantes grupos que continuaram a resolver a tarefa por processos analíticos, após constatarem que na primeira questão tinham de utilizar a semelhança de triângulos, resolveram-na sem grandes dificuldades. Na questão 2.1 o erro mais frequente foi o de cálculo. Por sua vez, o erro mais cometido na questão 2.2 foi a não restrição do conjunto solução da inequação ao domínio do problema.

Quando os alunos que resolveram a tarefa apenas por processos analíticos verificaram que alguns dos seus colegas estavam a resolver outra tarefa utilizando os computadores e com tanto entusiasmo, solicitaram também a sua realização. Dada a insistência dos alunos e o facto de todos os grupos ainda não terem terminado, optou-se por lhes ser facultado essa tarefa em detrimento do momento de discussão geral.

No final, todos os grupos consideram que a tarefa que incluía a utilização do computador era mais motivante e lhes permitia visualizar o problema.

No anexo 11 encontra-se um exemplo da resolução desta tarefa apresentada por um dos grupos da turma, que utilizou procedimentos analíticos.

2.2.3.2 Tarefa – O mundo de algumas cónicas

Nesta parte do trabalho será descrita a implementação da tarefa "Construção da parábola" e a apresentação de um PowerPoint para a introdução dos conceitos de parábola e de elipse, como lugar geométrico.

Começou-se a aula com a apresentação do primeiro diapositivo do PowerPoint. Neste slide referiu-se que a parábola faz parte de um conjunto de curvas designadas por cónicas. Por sua vez, esta designação provém da forma como essas curvas se obtêm a partir de secções planas de uma superfície cónica. Acrescentou-se que diferentes posições do plano de corte em relação à geratriz e ao eixo de rotação da superfície cónica dão origem a curvas distintas.

Seguidamente, foi pedido para resolverem a tarefa - Construção da parábola, que consta do anexo 12. Durante a primeira parte da sua resolução, as dificuldades que surgiram estavam relacionadas com os comandos do programa e foram pontualmente esclarecidas pelas professoras. Nesta fase, todos os grupos se mostraram muito empenhados e curiosos com as potencialidades do programa.

Na figura 17 está representada uma das parábolas obtida por um grupo da turma.

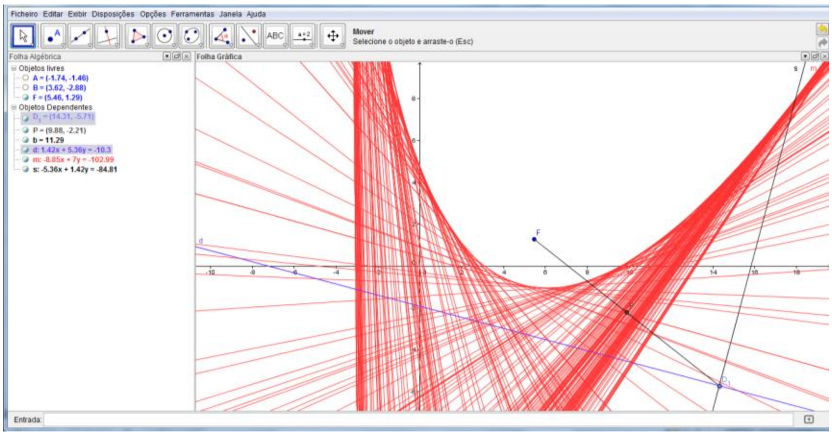


Figura 17 – Parábola construída por dois alunos do 10º C

Quanto à segunda parte da tarefa, estabelecer uma relação entre os pontos da parábola obtida, com a reta e com o ponto inicialmente construído, foi mais difícil de concretizar. A uma determinada altura foi necessário dar à turma a seguinte sugestão "*Observem bem as distâncias.*". Nesse instante, um aluno, referiu "*Os pontos pertencem à mediatriz.*". A maioria dos restantes alunos aproveitou a conclusão do colega completando *"O conjunto dos pontos da parábola está a mesma distância dos pontos F e D."*.

Perante a dificuldade em estabelecer uma relação que envolva a distância dos pontos da parábola à reta, ainda foi dada outra sugestão "*Vejam se isso se verifica só para o ponto D.*". Mesmo assim, nenhum aluno conseguiu estabelecer tal relação. Note-se que a definição da distância de um ponto a uma reta não faz parte do programa do décimo ano, razão pela qual os alunos não conseguiram identificá-la.

Após a introdução sumária desta definição, o aluno que interveio anteriormente em primeiro lugar disse "*O conjunto dos pontos que pertencem à parábola estão à mesma distância do ponto F e da reta d.*". Logo se aproveitou a resposta deste aluno para gerar na turma a discussão sobre a sua veracidade. No início alguns mostraram algumas hesitações, contudo, à medida que esse aluno dava esclarecimentos sobre a sua conclusão, os restantes iam ficando convictos de que a resposta do colega era a resposta correta. Desta forma, foi possível concluir que a parábola é o conjunto de pontos do plano equidistantes de um ponto e de uma reta que não contém esse ponto. Seguidamente, foi dado que: o ponto se designava por foco; a reta por diretriz e a reta que é perpendicular à diretriz que contém o foco é chamada eixo de simetria da parábola.

Prosseguiu-se a apresentação com a introdução da equação da parábola e a propriedade refletora da parábola. Terminou-se a parte da parábola com a alusão a alguns exemplos de aplicação.

Em seguida, foi introduzida uma nova cónica, a elipse, como a resultante da secção cónica quando o plano de corte interseta todas as geratrizes. Nesta situação, também se pode considerar que o plano de corte seja perpendicular ao eixo de rotação da superfície cónica, resultando um caso particular da elipse, o círculo. Continuou-se a apresentação referindo que a elipse pode ser obtida por pelo menos dois processos. O primeiro é designado pelo *método do jardineiro* e consiste em prender os dois extremos de um fio, que não seja elástico, a dois pontos fixos, chamados de focos e, mantendo o fio sempre esticado, e com a ajuda de um lápis desenha-se a elipse. O segundo consiste no alongamento de uma circunferência. Assim, por exemplo, se considerarmos dois pontos fixos da circunferência diametralmente opostos e esticarmos outro dois pontos, na mesma proporção, a figura resultante é uma elipse. Esta situação pode ser exemplificada na figura 18.

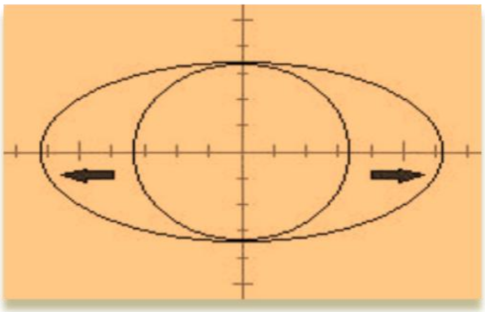


Figura 18 – Construção da elipse pelo processo de alongamento

Perante estes processos foi solicitado que caraterizassem a elipse com lugar geométrico. Nesta fase, vários alunos mostraram vontade em participar, pois, segundo eles, tendo em consideração o *método do jardineiro*, é fácil concluir que a soma das distâncias de um ponto da elipse aos focos é sempre constante. Seguidamente, os alunos foram interrogados sobre possíveis valores para essa constante. Após alguma reflexão e discussão, chegou-se à conclusão de que teria de ser maior que a distância entre os focos.

Prosseguiu-se a apresentação do PowerPoint com a equação da elipse centrada na origem e a alusão à sua propriedade refletora. Na parte destinada às aplicações da elipse foram apresentados exemplos na arquitetura, no designer e de uma mesa de bilhar elítica, onde uma bola que passa por um dos focos passará necessariamente pelo outro foco e andará assim sucessivamente de foco em foco, aproximando-se a sua trajetória do eixo maior. Por fim, referiu-se que o matemático Johannes Kepler, no início do século XVII, verificou que os planetas no seu movimento de translação em torno do sol, descrevem trajetórias elíticas nas quais o sol ocupa um dos focos.

Após esta introdução teórica e como consolidação da mesma, foi solicitada aos alunos a realização de um trabalho livre, que poderia ter diferentes formatos, mas teria de incluir parábolas e elipses. Este trabalho teria um caráter facultativo, uma vez que não iria contar para a avaliação.

A esta solicitação responderam dois alunos da turma que apresentaram o trabalho que consta da figura 19.

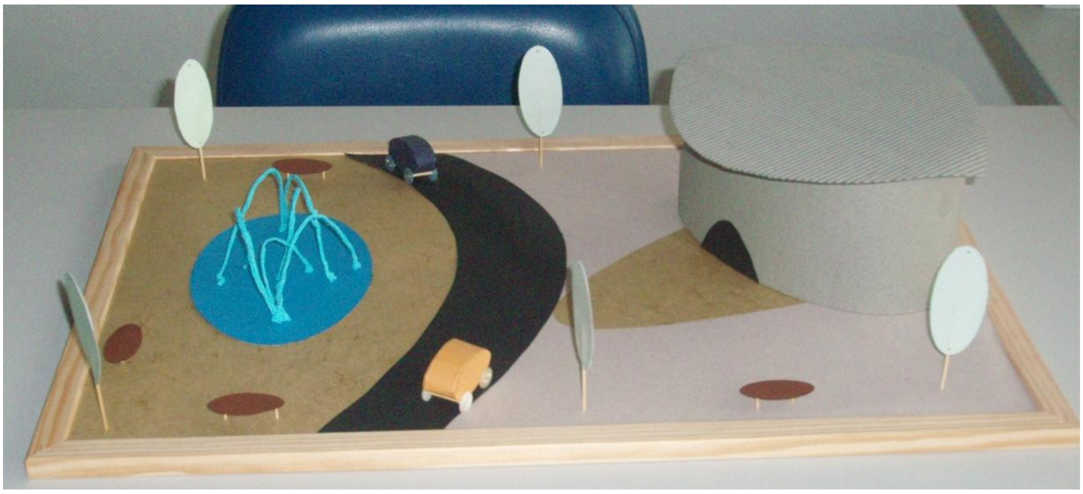


Figura 19 – Trabalho apresentado no âmbito do mundo de algumas cónicas

Na figura encontra-se parábolas nos repuxes do lago, na forma da porta, no passeio de acesso à casa e no telhado da casa. Por sua vez, tem-se elipse na base da casa, na forma das copas das árvores, no acento dos bancos de jardim, na base do lago e no alçado lateral dos carros.

Reflexões pessoais

As dificuldades que os alunos apresentam na resolução de equações quadráticas prendem-se, muitas vezes, com o facto de estas serem vistas como algo abstrato em que se repetem determinados procedimentos rotineiros.

Foi objetivo deste trabalho apresentar uma abordagem, em diferentes níveis de ensino, com problemas que envolvem equações do segundo grau, que contribuísse para a erradicação de tal pressuposto.

Verificou-se que no oitavo ano os alunos resolveram a tarefa proposta sem grandes dificuldades. Todos os alunos consideraram que a tarefa elaborada motiva para a aprendizagem das equações quadráticas e contribui para tomar consciência das suas aplicações.

No nono ano, os alunos ficaram surpreendidos com a sua aplicação em áreas que lhes são familiares como o lançamento de projéteis e o número de apertos de mão entre um determinado grupo de pessoas. A maioria dos alunos referiu que é importante saber resolver equações quadráticas e reconhece que as tarefas realizadas contribuíram para essa opinião. A tarefa de que mais gostaram foi a caça às equações. Esta tarefa foi encarada, por alguns alunos, como um jogo, ou seja, com caráter lúdico.

Os alunos do décimo ano consideraram que o trabalho com o programa de geometria dinâmica foi mais motivador e a informação obtida sobre a parábola e a elipse e as suas aplicações foi muito enriquecedora.

Como balanço final, considera-se que os objetivos inicialmente propostos foram amplamente atingidos. Com este trabalho, a maioria dos alunos reconheceu a importância das equações quadráticas, de acordo com as respostas dadas no questionário, quer na resolução de problemas quer para modelar situações reais.

Do ponto de vista pessoal foram aprofundados e adquiridos importantes conhecimentos científicos em relação às equações diferenciais de coeficientes constantes e de ordem dois e a algumas das suas aplicações. No que respeita à parte pedagógica, considero que o facto de não ter trabalhado com os meus alunos poderá ter influenciado a motivação e a sua participação nas tarefas, principalmente na tarefa do décimo ano referente ao mundo de algumas cónicas. Por outro lado, este trabalho permitiu-me estabelecer uma relação mais afetuosa com outros alunos da escola.

Referências

[1] Benevides, P.” Equações diferenciais – notas de aula”. http://paginapessoal.utfpr.edu.br/paulabenevides/equacoesdiferenciais/equacoes-diferencias/ED_PaulaBenevides.pdf (Consultado em 26 de fevereiro de 2012)

[2] Brauer, Fred (). *Introduction to differential equations with applications*. Harper & Row

[3] Budd, Crhis & Sangwin, Chris (2004). 101 uses of a quadratic equation. http://plus.maths.org/content/101-uses-quadratic-equation (Consultado em 9 de janeiro de 2012)

[4] Budd, Crhis & Sangwin, Chris (2004), 101 uses of a quadratic equation: Part II. http://plus.maths.org/content/101-uses-quadratic-equation-part-ii (consultado em 9 de janeiro de 2012)

[5] Costa, B. & Rodrigues, E. (2010). *Novo espaço 10º ano*. Porto Editora

[6] Duarte, T. O. & Filipe, J.P. (2010). *Matemática Dez*. Lisboa Editora

[7] Edward, M. (2003). *Diferential equations: computing and modeling.* Pearson Education

[8] Evangelista, António Carlos. Novos aspectos diferenciais do colapso da ponte suspensa Tacoma. www.sbmac.org.br/cmac-se2011/trabalhos/PDF/332.pdf (Consultado em 9 de Março de 2012)

[9] Figueiredo, D. G, & Neves, A.F. (2010). *Equações Diferenciais Aplicadas.* Terceira Edição. Coleção Matemática Universitária. ISBN: 978-85-244-0282-1.

[10] Goode, Stephen W.(2000). *Differential equations and linear algebra.* Prentice-Hall

[11] Leite, Fátima S. & Petronilho, José C. (2009). Notas de Equações Diferenciais e Modelação. Departamento de Matemática. FCTUC.

[12] Magro, F. C., Fidalgo, F. & Louçano (2012). *PI9*. Edições Asa

[13] Marinho, C. (2010). *Matemática A 10º ano*. Santillana

[14] McWalter, Tony (2003). Quadratic Equations. http://www.parliament.the-stationery-office.co.uk/pa/cm200203/cmhansrd/vo030626/debtext/30626-20.htm (Consultado em 9 de Março de 2012)

[15] Ministério da Educação (2001). *Programa de Matemática A do ensino secundário*. Lisboa: Autor

[16] Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do ensino básico*. Lisboa: Autor

[17] Neves, M. A. F., Guerreiro, L., Leite, A. & Silva, J.N. (2010). *Matemática A 10º ano*. Porto Editora

[18] Neves, M. A. F., Guerreiro, L., Leite, A. & Silva, J.N. (2012). *Matemática 9º ano*. Porto Editora

[19] Projeto teste intermédios http://www.gave.min-edu.pt/np3/430.html (consultado em 20 de Abril de 2012)

[20] Thudichum B., Passos, I. C. & Correia, O. F. (2012). *Matemática em ação 9*. Editora raiz

[21] Weinholtz, A. B. (2000). *EQUAÇÕES DIFERENCIAS: uma introdução*. Universidade de Lisboa.

[22] Zill, D.G. (2003). *Equações Diferencias com Aplicações em Modelagem*. São Paulo: THOMSON.

Anexos

Anexo 1 – Tarefa: Sequências e equações do 2º grau

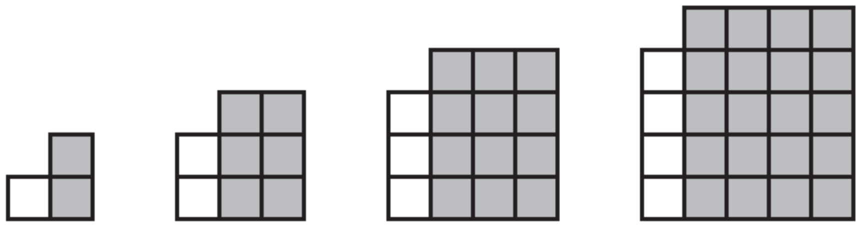
Tarefa – Sequências e equações do 2º grau

Sequências e Regularidades e Equações quadráticas

Ano de Escolaridade: 8.º ano

Na Figura, estão representados os quatro primeiros termos de uma sequência de conjuntos de azulejos quadrados que segue a lei de formação sugerida na figura.

Os azulejos são todos iguais, sendo uns brancos e outros cinzentos.



1.º termo 2.º termo 3.º termo 4.º termo

a) Qual a próxima figura desta sequência? E a seguinte? Desenha-as.

b) Quantos azulejos há nos primeiros cinco termos da sequência?

c) Quantos azulejos brancos e cinzentos são necessários para construir o 8º termo?

d) Será possível representar uma figura com 10 azulejos brancos e 100 azulejos cinzentos? Porquê?

e) Numa figura foram utilizados 12 azulejos brancos, quantos azulejos cinzentos tinha essa figura?

f) Indique uma expressão algébrica que permite determinar:

1. O número de azulejos brancos existentes na figura de ordem n.
2. O número de azulejos cinzentos existentes na figura de ordem n.

g) Escreva duas expressões algébricas diferentes que corresponda ao termo geral da sequência do número total de azulejos. Justifique algebricamente que essas expressões são equivalentes.

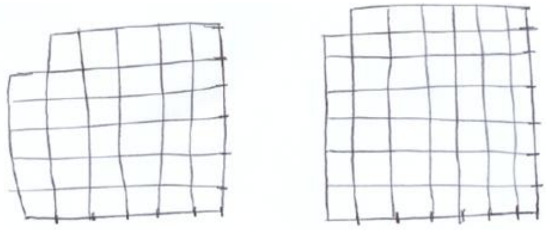
h) Em que posição se encontra a figura constituída por:

1. 224 azulejos;
2. 1088 azulejos.

Bom trabalho!!!

Anexo 2 – Resolução da tarefa: Sequências e equações do 2º grau

a)



5º termo 6º termo

b)

Termo	1º	2º	3º	4º	5º
Nº Azu.	3	8	15	24	35

Total = 85

c) 72 cinzentos : 8 brancos

d) Não, porque se forem 10 os azulejos brancos, serão necessários 110 azulejos cinzentos. Logo não será possível apresentar uma figura com 10 azulejos brancos e 100 azulejos cinzentos.

e) $12 \times 13 = 156$

R.: Essa figura tenha 156 azulejos cinzentos

f) 1. $B_n = n$

2. $C_n = n(n+1) = n^2 + 1n$

g) $(n+1)^2 = n^2 + 2 \times n \times 1 + 1^2 - 1 = n^2 + 2n + 0 = n^2 + 2n$

$B_n + C_n = n + n^2 + 1n = 2n + n^2$

h) 1. $(n+1)^2 - 1 = 224 \Leftrightarrow (n+1)^2 - 225 = 0 \Leftrightarrow (n+1)^2 - 15^2 = 0 \Leftrightarrow$

$n + 1 - 15 = 0 \vee n + 1 + 15 = 0 \Leftrightarrow n = 15 - 1 \vee n = -15 - 1 \Leftrightarrow$

$n = 14 \vee n = -16$

R.: A figura não poderia ter um termo negativo

2. $(n+1)^2 - 1 = 1088 \Leftrightarrow (n+1)^2 - 1 - 1088 = 0 \Leftrightarrow (n+1)^2 - 1089 = 0 \Leftrightarrow$

$(n+1)^2 + 33^2 = 0 \Leftrightarrow n + 1 + 33 = 0 \vee n + 1 - 33 = 0 \Leftrightarrow n = -33 - 1 \vee n = 33 - 1 \Leftrightarrow$

$n = -34 \vee n = 32$

R.: A figura não poderá ter um termo negativo

Mª Inês Amaral
Nº 15
Gonçalo Almeida
Nº 11
Joana Dinis
Nº 14
Catarina Silva
Nº 6

Anexo 3 - Questionário relativo à tarefa: Sequências e equações do 2º grau

1) A tarefa realizada motiva a aprendizagem para as equações do segundo grau?

Sim, porque apesar de serem exercícios de sequências, necessitamos de resolver equações do segundo grau para encontrarmos algumas soluções nas sequências.

2) Esta tarefa contribuiu para uma melhor aprendizagem das equações do 2º grau?

Sim, porque ficamos a perceber o porquê da existência de equações de 2º grau, ou seja, porque temos que resolver estas equações.

3) Consideras importante saber resolver equações do 2º grau?

Sim, porque elas permitem-nos encontrar soluções em diferentes situações.

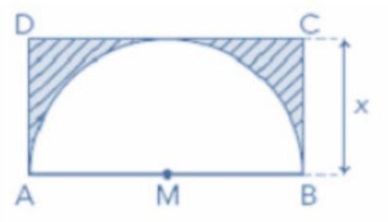
Mª Inês Amaral
Nº 15

Anexo 4 – Tarefa: Problemas com a equação do 2º grau

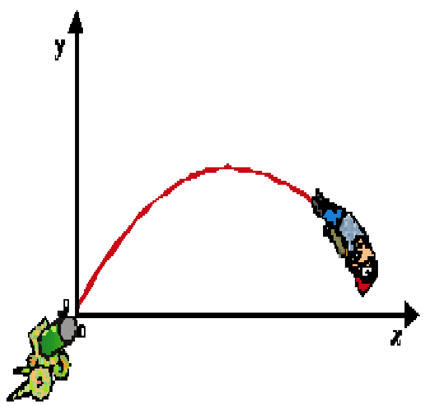
Escola Secundária de Oliveira do Hospital

Tarefa – Problemas com equações do 2º grau

1. O João tem um terreno retangular no qual construiu uma piscina na forma de um semicírculo, de acordo com a figura. A área da parte relvada, representada a sombreada, é 43 cm^2. Quais são as dimensões do terreno do João.
(Use 3,14 como valor aproximado para π)



2. O primeiro homem-bala, disparado por um canhão que atravessou uma arena e caiu em uma rede, foi um dos irmãos Zacchini, de uma famosa família italiana de artistas de circo, em 1922.
Para criar mais suspense, aumentaram gradativamente a altura e a distância do voo até que, por volta de 1940, Emanuel Zacchini foi lançado por cima de três rodas-gigantes, percorrendo horizontalmente 69 metros.
A trajetória do homem-bala, no caso de se desprezar a resistência do ar, pode ser descrita pela equação: $y=-\frac{g}{2}x^2+v_0x$, sendo g a força da gravidade e v_0 a velocidade inicial.
No parque de diversões da Magiaquadrática aparece um stand onde é possível experimentar a sensação do homem-bala. O Francisco, que gosta de aventuras, disponibilizou-se para participar. Considere que única força a atuar sobre ele é a força da gravidade com valor de 10 m/s^2 e que a velocidade no momento do lançamento é de 10 m/s.
A figura ao lado mostra a trajetória descrita pelo Francisco, em que a origem (0,0) do plano cartesiano (x, y) encontra-se no ponto de partida.
2.1 Defina a equação do movimento do exercido pelo Francisco.
2.2 Determine a distância que o Francisco atinge horizontalmente a partir do ponto de lançamento.



3. Na Escola da Inês, todas os alunos se cumprimentam uma só vez com um aperto de mão.
3.1. Completa a tabela seguinte:

Nº de pessoas	2	3	4		…	n
Nº de apertos de mão	1	3		10	…	

3.2. Qual é o número total de pessoas que cumprimentaram a Inês, sabendo que efetuou 190 apertos de mão?

Bom trabalho!!!

Anexo 5 – Resolução da tarefa: Problemas com a equação do 2º grau

1- $A_{\frown} = \frac{\pi \times r^2}{2}$

$A_{\frown} = \frac{3,14 \times x^2}{2}$

$A_{\frown} = 1,57x^2$

$A_{\square} = 2x \times x$

$A_{\square} = 2x^2$

$2x^2 - 1,57x^2 = 43$

$\Leftrightarrow 0,43x^2 = 43$

$\Leftrightarrow x^2 = \frac{43}{0,43}$

$\Leftrightarrow x^2 = 100$

$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{100}$

$\Leftrightarrow x = \pm 10$

R.: O valor de x é igual a 10 uma vez que não há medidas negativas.
O comprimento do retângulo é 20 e a largura é 10.

2

2.1 - $y = -\frac{10}{2}x^2 + 10x = -5x^2 + 10x$

2.2 $y = 0$

$y = -5x^2 + 10x$

$-5x^2 + 10x = 0$

$-5x^2 + 10x = 0$

$\Leftrightarrow x(-5x + 10) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee -5x + 10 = 0$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -\frac{10}{5}$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$

R.: O homem bala vai cair a 2 metros

3

3.1

Nº de pessoas	2	3	4	5	...	n
Nº de apertos de mão	1	3	6	10	...	$\frac{n(n-1)}{2}$

2 pessoas 3 pessoas 4 pessoas 5 pessoas

3+2+1

4+3+2+1

3.2 $\frac{n(n-1)}{2} = 190$

$\Leftrightarrow \frac{n^2 - 1n}{2} = \frac{190}{(\times 2)}$

$\Leftrightarrow \frac{n^2 - 1n}{\cancel{2}} = \frac{380}{\cancel{2}}$

$\Leftrightarrow n^2 - 1n - 380 = 0$

$a = 1 \quad b = -1 \quad c = -380$

$\Leftrightarrow x = -(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 1 \times (-380)}$

$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 1520}}{2}$

$\Leftrightarrow x = \frac{1 + 39}{2} \vee x = \frac{1 - 39}{2}$

$\Leftrightarrow x = 20 \vee x = -19$

R.: Se forem efetuados 190 apertos de mão o número total de pessoas é 20.

Bárbara N.º 1
Luís N.º 19
Joana N.º 13

Anexo 6 – Tarefa: Caça às equações

Escola Secundária de Oliveira do Hospital

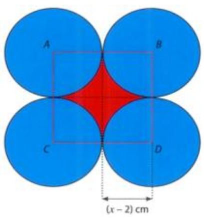
Tarefa – Caça às equações

Ano de Escolaridade: 9.º ano

Analise cada uma das várias situações apresentadas e formule uma questão de modo a transforma-las num problema cuja resolução envolva equações do segundo grau.
Quando descobrir escreva na sua folha de papel
EUREKA!
Apresente a questão e a equação do segundo grau que lhe está associada.

1. Um bambu partiu-se, a uma altura do chão de 2,275 m, e a parte de cima, ao cair, tocou o chão, a uma distância de 1,5 m da base do bambu.

2. Considere a figura abaixo constituída por quatro círculos geometricamente iguais em que os vértices do quadrado ABCD são os centros dos quatro círculos apresentados.



3. Nós macacos, brincamos
Divididos em dois bandos.
O quadrado da oitava parte
Está entre os ramos.
Uma dúzia vai aos gritos
Tão contentes que nos pomos

4. O número da porta da casa da Inês:
- é constituído por três algarismos cujo produto é setenta;
- o algarismo das centenas excede em 2 o algarismo das unidades;
- o algarismo das dezenas corresponde ao primeiro número primo.

5. Um parque de campismo foi construído no meio de um pinhal. Todos os campistas que chegam ao parque recebem um esquema como o da figura, onde lhes é indicada a zona onde podem acampar e a zona de segurança contra incêndios (uma tira, sempre com a mesma largura, à volta da zona de campismo) que devem deixar desocupada. Além disso, a zona de campismo tem a mesma área da zona de segurança.

Anexo 7 - Resolução da tarefa: Caça às equações

1- Eureka

Qual a altura do bambu?

$x^2 = 2,75^2 + 1,5^2$

$h = x + 2,75$

2- Eureka

Qual o valor de x para que a área do círculo seja igual a 30?

$\pi (x-2)^2 = 30$

3- Eureka

Qual é o numero de macacos?

$\left(\frac{x}{8}\right)^2 + 12 = x$

4- Eureka

Qual é o numero da porta?

$x(x+2) \times 2 = 70$

5- Eureka

Qual o valor de x para que a área da zona de segurança seja igual à da zona de campismo?

$(50 + x)(30 + 2x) = 30 \times 50$

ou

$(50 + x) \times (30 + 2x) = 1500$

Também pode ser:

Qual o valor de x para que a área da zona de segurança seja metade da área da zona de campismo?

Luís e Andr

Anexo 8 – Questionário relativo às tarefas do nono ano

1) As tarefas realizadas motivam para aprendizagem das equações do segundo grau?

Sim. Porque utilizamos as equações de segundo grau para resolver os problemas.

2) As tarefas realizadas contribuíram para uma melhor aprendizagem das equações do 2º grau?

Sim, pois permite ver exemplos de aplicações de equações do segundo grau e entender o que é uma equação.

3) As tarefas permitiram aprofundar os teus conhecimentos sobre as equações do 2º grau?

Sim, porque deu para trabalhar as equações do segundo grau completas e incompletas.

4) Qual das tarefas gostaste mais? Porquê?

A caça equações porque foi como um jogo.

5) Consideras importante saber resolver equações do 2º grau?

Sim, pois facilita a resolução de certos problemas.

Cristina Costa

Anexo 9 – Tarefa: Problema do canteiro

Escola Secundária de Oliveira do Hospital

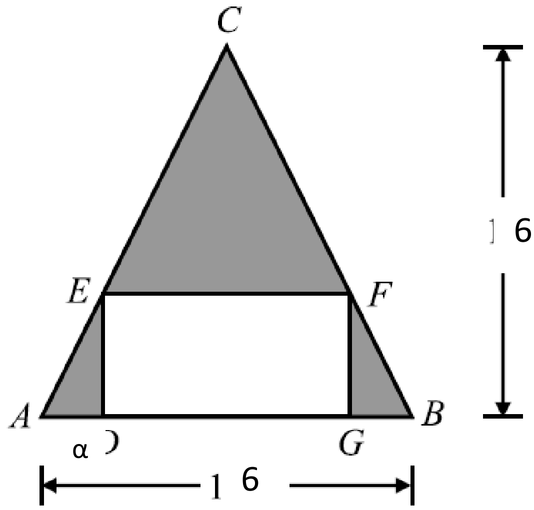
Tarefa – Problema do canteiro

Ano de Escolaridade: 10.º ano

Num terreno na forma de um triângulo isósceles, o João pretende construir um canteiro com uma zona rectangular, destinada à plantação de flores, e uma zona relvada. Atendendo a que a sua esposa gosta muito de flores, decidiu que a parte relvada deverá ter a menor área possível.

Começou por elaborar o projeto, que se apresenta na figura abaixo e no qual a zona a relvar está representada a sombreado, de forma a permitir encontrar as dimensões pretendidas.

No triângulo isósceles ($\overline{AC} = \overline{BC}$), a base $[AB]$ e a altura relativa a esta base medem ambas 6 metros. O lado $[DC]$ do rectângulo está contido em $[AB]$ e os vértices E e F pertencem, respetivamente, a $[AC]$ e a $[BC]$.



1. Determine em função de α a expressão que traduz a área da zona relvada.

2. Com a função obtida anteriormente, determine, por **processos analíticos**:

   2.1. o valor de α para o qual a área da zona relvada é mínima e calcule essa área.

   2.2. os valores de α para os quais a área da zona relvada é superior a $10 m^2$.

Tarefa – Modelação do problema do canteiro

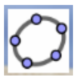
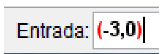
Ano de Escolaridade: 10.º ano

1. O João não tem conhecimentos matemáticos que lhe permita resolver o problema, no entanto foi aconselhado por um amigo a utilizar um programa de Geometria Dinâmica Geogeba[4]. Nesse programa necessita de construir a figura dada de forma a poder fazer uma recolha dos dados, que lhe permita obter pontos do gráfico da referida função. Na presença desses pontos, o próprio programa permite obter a regressão que melhor se ajusta a esses pontos.

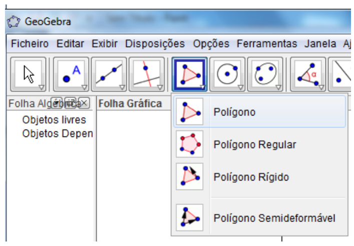
Esse amigo disse-lhe, ainda, que iria obter a função que dá a área da zona relvada em função de **α** se seguir as indicações dadas abaixo.

Constate a veracidade da afirmação.

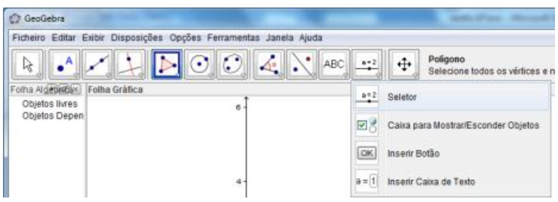
Indicações:

1. Abra o programa que representado pelo símbolo 
2. Seguidamente clique no botão direito do rato e escolha a opção **Folha Gráfica** e defina para **xmin**: -4, **xmax**: 17, **ymin**:-1 e **ymax**: 20.
3. Marque os pontos A(-3,0), B(3,0) e C(0,6), 

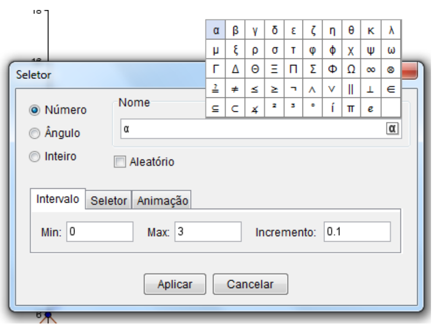
introduzindo na **Entrada** as respetivas coordenadas, de acordo com a figura seguido de enter.



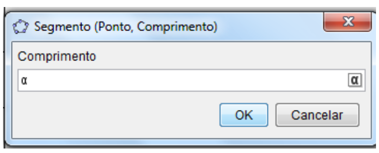
4. Selecione na ferramenta **Polígono** e com a seta escolha os três pontos anteriores de modo a construir o triângulo $[ABC]$.



5. Defina um seletor, procedendo de acordo com a figura ao lado.

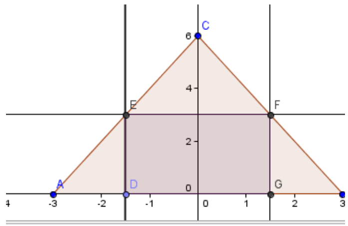


6. Atribua-lhe o nome α e faça-o variar entre 0 e 3, como é indicado na ilustração ao lado.
7. Construa, agora um segmento de reta, pertencente à reta AB, com extremidade em A e de comprimento α.



Para tal, na ferramenta **Reta** escolha a opção indicada na figura, com a seta selecione primeiro o ponto e clique, seguidamente coloque o comprimento α.

8. Faça passar pelo ponto encontrado no passo anterior uma reta perpendicular ao eixo *ox*, escolhendo **recta perpendicular** na quarta ferramenta apresentada a partir da esquerda. Selecione seguidamente o eixo e depois desloque a recta até ao ponto pretendido.



9. Na segunda ferramenta escolha **Interseção de Dois Objetos** para encontrar o ponto de interseção entre a reta anteriormente obtida com o segmento de reta $[AC]$.

10. Efetue os mesmo procedimentos até encontrar os restantes pontos do retângulo $[DEFG]$ apresentado na figura.

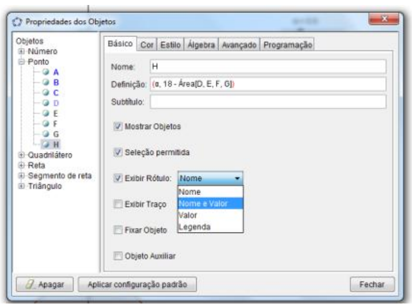
11. Construa o retângulo $[DEFG]$, procedendo da mesma forma que a utilizada para a construção do triângulo (passo 4).

12. Esconda as retas auxiliares utilizadas, desativando a sua equação na **Folha Algébrica**.

13. Os pontos obtidos podem mover-se à medida que se faz deslocar o seletor com a , verifique que tal acontece.

14. Na entrada escreva conforme o indicado na a figura Entrada: (α,18-Área[D,E,F,G]) .

1.1 Explique a que corresponde este procedimento.



15. Seleccione o ponto obtido com o botão do lado direito do rato e escolha na janela a opção propriedades. No menu ***Propriedades*** escolha o submenu ***Básico*** e clique na opção **Exibir Rótulo com nome e traço,** de acordo com o indicado na figura. Escolha também o submenu **Exibir traço.**

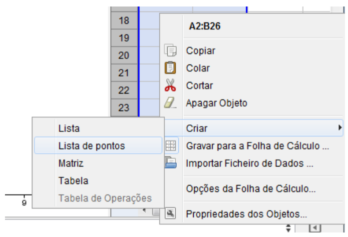
Assim, estão reunidas as condições que permitem a recolha de dados, já que, quando se move o seletor*,* as coordenadas de ***H*** fornecem os dados pretendidos.

16. Para a recolha das coordenadas do ponto ***H*** proceda da seguinte forma:

1.º mova-se o seletor para o início.

2.º no menu ***Exibir,*** escolhe-se a opção ***Folha de Cálculo.***

3.º selecione o ponto *H* e clique no botão direito do rato. Na janela que surge, escolha a opção **gravar para a folha de cálculo.** Em seguida mova, lentamente, o ponto do seletor até ao valor 3.



17. Para obter a regressão tem de seguir os seguintes passos:

1.º seleccione todas as células preenchidas da folha de cálculo e, com o botão direito do rato, escolha, na janela que surge, a opção ***Criar lista de pontos***, conforme é indicado na figura.
Na folha algébrica verifique se surgir um conjunto de pontos designados por lista1.

2.º identifique o grau do polinómio que se adapta aos pontos obtidos.

1.2 Qual considera ser o grau do polinómio que se ajusta à nuvem de pontos?

3.º escreva na **Entrada**: **Regressãopolinomial[lista1,n],** sendo **n** o número correspondente ao grau do polinómio que considera que se ajusta aos pontos.

4.º clique no botão direito do rato. Na janela que surge, escolha **Propriedades** e nesta a opção **Exibir Nome e valor. Desta forma,** obtém a expressão algébrica da função que se adapta à curva.

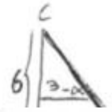
1.3 Indique a expressão do polinómio.

18. Guarde o ficheiro com o seu nome.

Anexo 10 – Resolução da tarefa: Problema do canteiro

1. Determine em função de α a expressão que traduz a área da zona relvada.

$A_{\triangle} = \frac{b\times h}{2} \Leftrightarrow A_{\triangle} = \frac{6\times 6}{2} \Leftrightarrow A_{\triangle} = \frac{36}{2} \Leftrightarrow A = 18\ m^2$



$\frac{6}{x} = \frac{3}{3-\alpha} \Leftrightarrow 6(3-\alpha) = 3x \Leftrightarrow 18 - 6\alpha = 3x \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 6 - 2\alpha = x \Leftrightarrow x = 6 - 2\alpha$

2. Com a função obtida anteriormente, determine, por processos analíticos:

2.1. o valor de α para o qual a área da zona relvada é mínima e calcule essa área.

Como a > 0, a parábola está virada para cima. Logo a mínima área é o vértice da parábola.

$4\alpha^2 - 12\alpha + 18 = 4\left(\alpha^2 - \frac{12}{4}\alpha\right) + 18 = 4(\alpha^2 - 3\alpha) + 18 =$

$= 4\left(\alpha^2 - 3\alpha + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2\right) + 18 = 4\left(\alpha - \frac{3}{2}\right)^2 + 18 - 4\times\left(\frac{3}{2}\right)^2$

$= 4\left(\alpha - \frac{3}{2}\right)^2 + 18 - 4\times\frac{9}{4}$

$\Leftrightarrow 4\left(\alpha - \frac{3}{2}\right)^2 + 18 - \frac{36}{4}$

$\Leftrightarrow 4\left(\alpha - \frac{3}{2}\right)^2 + 18 - 9$

$\Leftrightarrow 4\left(\alpha - \frac{3}{2}\right)^2 + 9\ m^2$

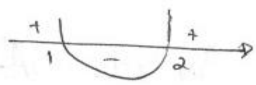
R.: A área mínima da zona relvada corresponde à ordenada do seu vértice, pois V(h,k). Logo a área mínima da zona relvada é 9m².

2.2. os valores de α para os quais a área da zona relvada é superior a $10m^2$.

$4\alpha^2 - 12\alpha + 18 > 10 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 4\alpha^2 - 12\alpha + 8 > 0$

zeros:
$4\alpha^2 - 12\alpha + 8 = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \alpha = \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4\times 4\times 8}}{2\times 4}$
$\Leftrightarrow \alpha = 1 \vee \alpha = 2$

$\alpha \in]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[$



Como o α apenas pode tomar valores entre]0,3[, α apenas pertence:

$\alpha \in]0,1[\cup]2,3[$

Anexo 11 -Questionário relativo à tarefa: Problema do canteiro

1) A tarefa realizada motiva a aprendizagem para as equações do segundo grau?

Sim, pois é uma atividade dinâmica que estimula a atenção dos alunos.

2) Esta tarefa contribuiu para uma melhor aprendizagem das equações do 2º grau?

Sim, esclarece possíveis dúvidas num ambiente mais descontraído

3) Considera importante saber resolver equações do 2º grau? Porquê?

Sim, para avançar nos conteúdos programáticos.

4) Considera que o uso do programa de Geometria Dinâmica contribuiu para motivar a resolução deste problema?

Sim, simplifica a visualização do processo.

1) A tarefa realizada motiva a aprendizagem para as equações do segundo grau?

Sim, visto que é uma atividade dinâmica

2) Esta tarefa contribuiu para uma melhor aprendizagem das equações do 2º grau?

Sim, porque permite-nos através de vários processos resolver equações do 2.º grau.

3) Considera importante saber resolver equações do 2º grau? Porquê?

Sim, porque se adapta quer aos problemas matemáticos, quer aos da vida quotidiana.

Anexo 12 – Tarefa: Construção da parábola

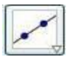
Escola Secundária de Oliveira do Hospital

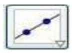
Tarefa – Construção da parábola

Ano de Escolaridade: 10.º ano

a) Construa uma parábola no programa de geometria dinâmica GeoGebra.

Para iniciar a atividade proposta, siga os “passos” a seguir:

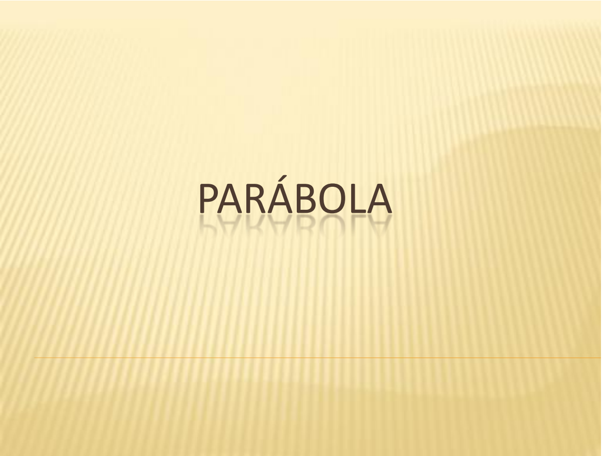
1. Abra o programa *GeoGebra* . Entre no menu ***exibir*** e desmarque a opção ***eixo*** para ocultar o plano cartesiano.
2. Construa uma reta horizontal utilizando a ferramenta  e clique em *reta definida por dois pontos*;
3. Oculte os pontos *A* e *B* que apareceram sobre a reta. Clique sobre o ponto *A*, com o botão direito do rato e desmarque a opção ***exibir objeto***. Repetir o procedimento para o ponto *B*;
4. Clique sobre a reta com o botão direito do rato, em seguida, ir para a opção ***Renomear***, digitalize a letra ***d*** e clique em ***Aplica****r*;
5. Marque um ponto *D* sobre a reta *d*, utilizando a ferramenta ***Novo ponto*** 

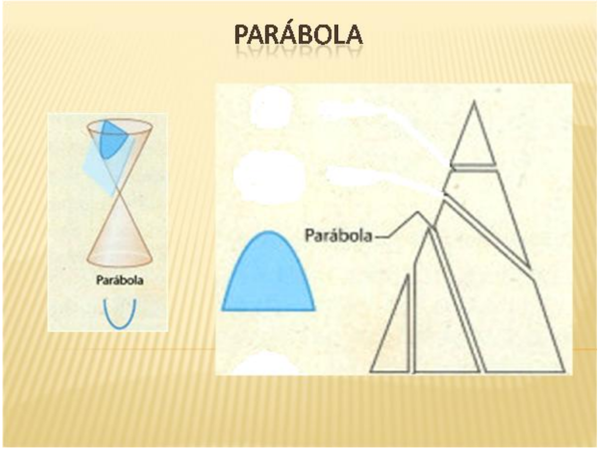
6. Marque um ponto *F* fora da reta;
7. Construa um segmento de reta [*DF]*, utilizando na ferramenta **reta** a opção ***Segmento (dois pontos)***, em seguida, clique sobre os pontos *D* e *F*;
8. Construa a mediatriz *m* do segmento [*DF]*, utilizando a ferramenta ,  selecione a opção ***mediatriz,*** e clicar sobre o segmento *DF*;
9. Construa a perpendicular *s* à reta *d*, passando pelo ponto *D*. Use a ferramenta  selecione a opção **reta perpendicular**, clicar sobre a reta *d* e sobre o ponto *D*.
10. Marque o ponto *P* de intersecção de *m* com *s*, utilizando a ferramenta. 

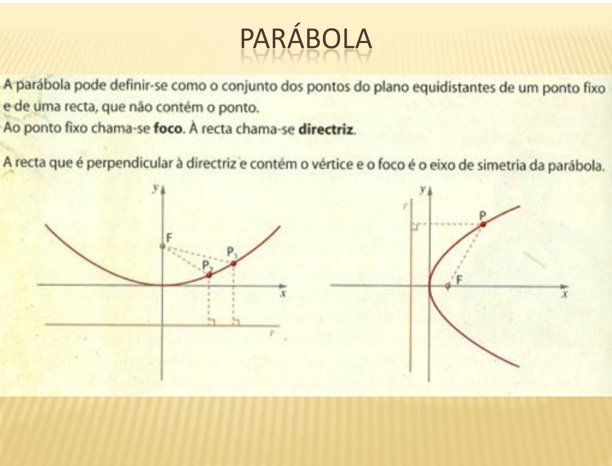
Selecione a opção **intersecção de dois objetos**, em seguida clique sobre as retas *s* e *m*.
11. Selecione a mediatriz *m*, clicando sobre ela com o botão direito do rato, escolha a opção ***Ativar rastro***.
12. Selecione o ponto *D* e arraste-o sobre a diretriz *d* e observe o que obtém.
13. Grave o ficheiro no ambiente de trabalho com o seu nome

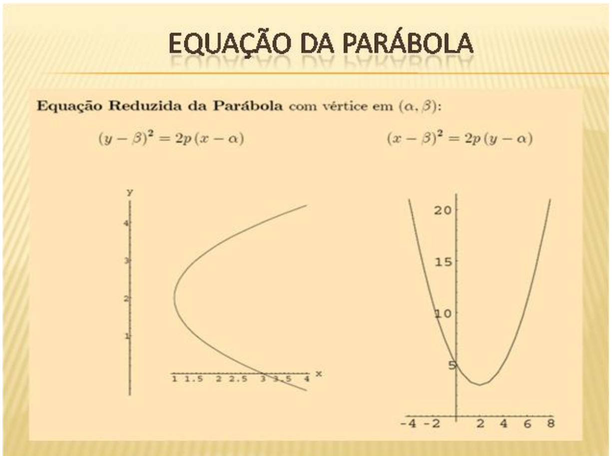
b) Estabeleça uma relação entre o conjunto de pontos que pertence à parábola com a reta e com o ponto inicialmente representado.

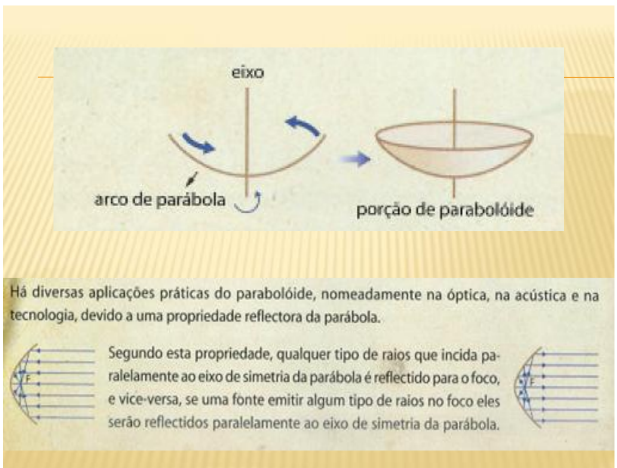
Anexo 13 – O mundo de algumas cónicas



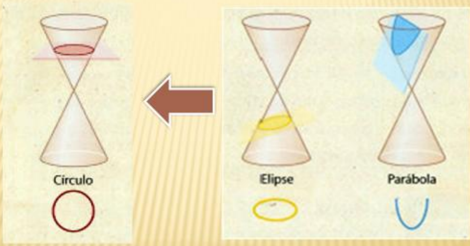


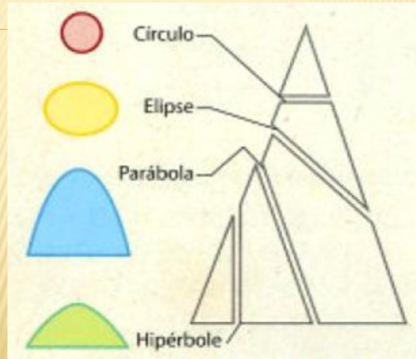




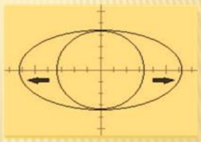


ELIPSE

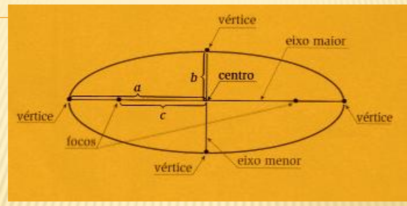




CONSTRUÇÃO DA ELIPSE



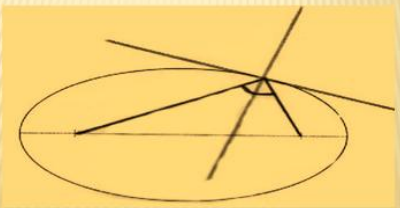
Elipse é o lugar geométrico dos pontos do plano tais que a soma das distâncias a dois pontos fixos (focos) é constante e maior que a distância entre os focos.



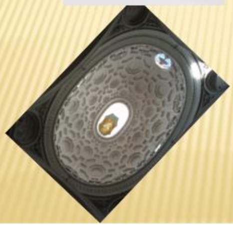
Equação reduzida da elipse: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

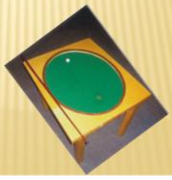
PROPRIEDADE REFLETORA DA ELIPSE

"Em qualquer elipse, um raio emitido de um dos seus focos reflete-se passando pelo outro foco."



APLICAÇÕES





TRABALHO

Elabore um trabalho que envolva as cónicas apresentadas e que poderá ter diferentes formatos (papel, maqueta, fotografia, etc).

Este deverá ser acompanhado de uma síntese descritiva dos tipos de cónicas utilizadas